

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОУ ВПО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ –
УПИ»

И.П. Соловьянова, С.Н. Шабунин

ТЕОРИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ
АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Учебное пособие

Екатеринбург

2004

УДК 534
ББК 33.87
Т 33

Рецензенты:

кафедра конструирования и производства радиоаппаратуры Южно-Уральского государственного университета (зав. кафедрой – проф. д-р техн. наук Н.И. Войтович);

доцент кафедры физики Уральской горно-геологической академии, канд. техн. наук С.А. Ильиных.

Авторы И.П. Соловьянова, С.Н. Шабунин

Т 33 ТЕОРИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ: Акустические волны: Учебной пособие / И.П. Соловьянова, С.Н. Шабунин. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2004. 142 с.

ISBN 5-321-00398 X

Изложены основы теории акустических волн, особенности отражения и преломления акустических волн на границах газообразных, жидких и твердых сред, рассмотрены схемы построения радиотехнических устройств на акустических волнах.

Пособие предназначено для студентов радиотехнических и связанных специальностей

Библиогр.: 7 назв. Табл. 6. Рис. 40.

УДК 534
ББК 33.87

ISBN 5-321-00398 X

© ГОУ ВПО «Уральский государственный
технический университет – УПИ», 2004
© И.П. Соловьянова, С.Н. Шабунин, 2004

Предисловие

Теория волновых процессов – область науки, исследующая волновые явления различной природы.

С колебаниями и волнами человек встречается постоянно. Существует большое многообразие волновых процессов: волны, порождаемые землетрясениями, звуковые волны, распространяющиеся в воздухе, волны механических колебаний в натянутых струнах музыкальных инструментов или в кристаллах кварца, используемые для стабилизации частоты радиопередатчика, электромагнитные волны, излучаемые антенной, и многие-многие другие. Несмотря на большое разнообразие, в колебательных процессах наблюдаются одни и те же закономерности, которые описываются одинаковыми математическими и физическими моделями и исследуются общими методами.

Цель, поставленная авторами перед собой, – ознакомить будущего инженера с основами теории колебаний и волн, в основном применительно к проблемам радиотехники. Основное внимание в предлагаемой работе уделено акустическим волнам, но отмечается единство математического описания поведения как акустических, так и электромагнитных волн. Приведены примеры использования акустических волн в элементах радиоэлектронной аппаратуры.

Необходимость написания данного пособия возникла в связи с отсутствием на данный момент учебника или учебного пособия, в полной мере освещающего вопросы, изучаемые в курсе «Теория волновых процессов» студентами радиотехнического факультета Уральского государственного технического университета – УПИ.

Учебное пособие состоит из шести разделов, последовательно рассматривающих основные термины теории волновых колебаний и полей, распространение акустических волн в газообразных, жидких и твердых средах, особенности поведения упругих волн на границе раздела сред, способы возбуждения пространственных и поверхностных акустических волн. Даются некоторые сведения об особенностях восприятия звуковых волн человеком.

В конце каждого раздела пособия приведены задачи для самостоятельного решения. В конце пособия даются ответы и способы решения этих задач.

Имеется два приложения с элементами векторного анализа, используемыми при выводе формул, и акустические параметры некоторых сред.

Пособие предназначено для студентов специальностей 2007 – Радиотехника и 2016 – Радиоэлектронные устройства направления 654200 – Радиотехника, а также может быть полезно для самостоятельного изучения разделов акустики и акустоэлектроники.

Выражаем искреннюю признательность рецензентам рукописи – профессору Н.И. Войтовичу и доценту С.А. Ильиных.

Приносим свою благодарность декану радиотехнического факультета Уральского государственного технического университета – УПИ С.Т. Князеву и заместителю декана О.А. Гусеву за помощь и поддержку, позволившую появиться данному пособию в свет.

И.П. Соловьянова, С.Н. Шабунин

Глава 1. Общие сведения о волновых процессах

1.1. Упругие и электромагнитные волны

Несмотря на большое многообразие волновых процессов, в природе можно сформулировать следующее определение, справедливое для любых видов волн.

Волной называется любое изменение (возмущение) состояния среды, распространяющееся с конечной скоростью и несущее энергию.

Все волны можно разделить на два типа: упругие и электромагнитные. **Упругие** (другое название **акустические**) **волны** – это волны, связанные с колебаниями частиц при механической деформации упругой среды (жидкой, газообразной, твердой). При этом имеет место перенос энергии упругой деформации при отсутствии переноса вещества. Примером акустических волн являются звуковые волны, представляющие собой чередующиеся области повышенного и пониженного давления воздуха, расходящиеся от источника звука.

В акустической волне частицы среды совершают колебания вокруг точки покоя. Волна, у которой вектор колебательной скорости параллелен направлению распространения, называется **продольной волной**. Если невозмущенную среду представить в виде регулярной структуры (рис. 1.1,а), то в случае продольной волны области сжатия и разрежения будут чередоваться вдоль направления распространения волны (рис. 1.1,б). Частицы среды колеблются в направлении, совпадающем с направлением распространения волны. Примером продольной волны можно считать звуковую волну, расходящуюся от акустической системы усилителя звуковых частот. Если частицы среды под действием волновой энергии совершают колебания в направлении, перпендикулярном распространению волны, такая волна называется **поперечной или сдвиговой** (рис.1.1,в). Колебание струны можно рассматривать как стоячую поперечную волну.

Акустическое поле можно рассматривать как совокупность упругих волн. Акустические поля описываются скалярными функциями и называются скалярными полями (Прил. 1).

Понятие электромагнитного поля определено комитетом технической терминологии.

Электромагнитное поле – это особый вид материи, отличающийся непрерывным распределением (электромагнитные волны) и обнаруживающий дискретность структуры (фотоны), характеризующийся способностью распространяться в вакууме (в отсутствие сильных гравитационных полей) со скоростью, близкой к $3 \cdot 10^8$ м/с, оказывающий на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их скорости. Частным случаем электромагнитного поля являются свет и радиоволны.

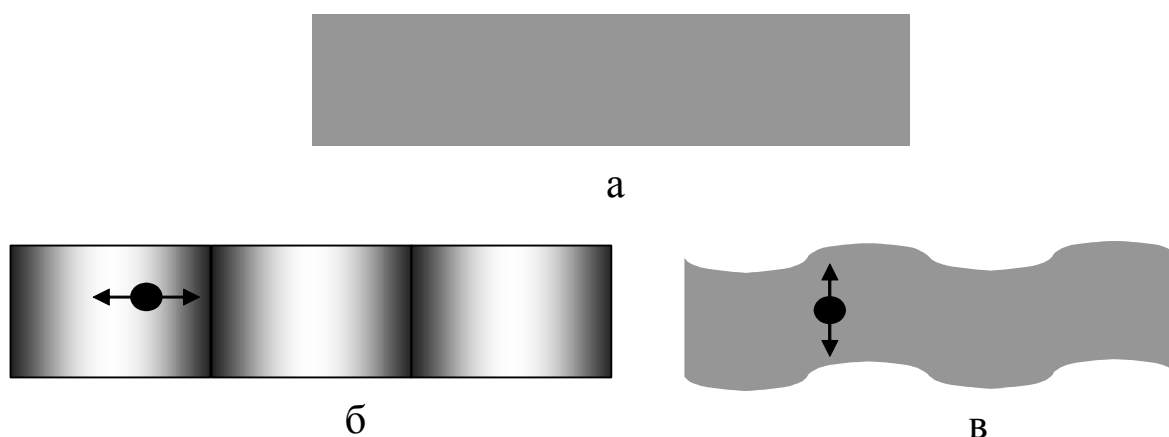


Рис.1.1. Невозмущенная среда (а), среда с продольной упругой волной (б), среда со сдвиговой упругой волной (в)

Электромагнитные поля описываются векторными функциями и являются векторными полями (Прил. 1).

1.2. Распределение волн по частоте

Среди упругих волн самые низкие частоты имеют инфразвуковые волны (рис.1.2), лежащие ниже границы слышимости их человеком (ниже 16-20 Гц). Инфразвук содержится в шуме атмосферы и моря, источником которого являются турбулентность атмосферы и ветер, грозные разряды (гром), взрывы, орудийные выстрелы. Источником инфразвука являются вибрации различных узлов механизмов, двигателей и т.д. Для инфразвука характерно малое поглощение в различных средах, в связи с чем он может распространяться на большие

расстояния. Это позволяет определять места сильных взрывов, предсказывать цунами, исследовать свойства водной среды.

Звуковые колебания – диапазон частот упругих волн, воспринимаемых ухом человека (от 20 Гц до 16-20 кГц). Источником звука могут быть любые явления, вызывающие местное изменение давления. Широко распространены источники звука в виде колеблющихся твердых тел, например диффузоры громкоговорителей, мембраны телефонов, струны и деки музыкальных инструментов.

Ультразвуковые волны по своей природе не отличаются от волн звукового диапазона, однако человеческим ухом они уже не воспринимаются. Диапазон их частот лежит от 16-20 кГц до 1 ГГц. В связи с малой длиной волны распространение ультразвуковых волн существенно зависит от молекулярной структуры среды. Это позволяет, измеряя скорость распространения и затухание волн, судить о свойствах среды, определять наличие неоднородностей и дефектов. Основными источниками ультразвуковых волн являются электромеханические преобразователи (пьезоэлектрические, электродинамические, электростатические и т.п.).

Источником гиперзвуковых колебаний (от 10^9 до 10^{12} - 10^{13} Гц) является тепловое колебание атомов или ионов, составляющих кристаллическую решетку твердого тела. Это колебание можно рассматривать как тепловой шум – совокупность упругих продольных и сдвиговых волн. Источниками гиперзвуковых колебаний могут быть пленочные пьезоэлектрические преобразователи, а также кристаллы, помещенные в объемный резонатор с электромагнитным колебанием сверхвысоких частот. В воздухе и жидкости гиперзвуковые колебания испытывают очень сильное затухание.

Теорией акустических волн занимается линейная и нелинейная акустика (греческое *acustikos* – слуховой). Прикладные области науки и техники акустических волн разнообразны – акустоэлектроника, электроакустика, гидроакустика, кристаллоакустика, атмосферная акустика, физиологическая акустика (все характеристики речи), архитектурная акустика, акустика в медицине, на производстве и т.д.

Распределение электромагнитных волн и колебаний по частоте связано с их природой и показано на рис.1.2. На низких частотах колебания напряжения и тока в электрических цепях можно рассматривать как одно из проявлений законов электродинамики (науки об электромагнитном поле). Основной особенностью при этом является то, что размеры линий много меньше длины волны. Напряжения и

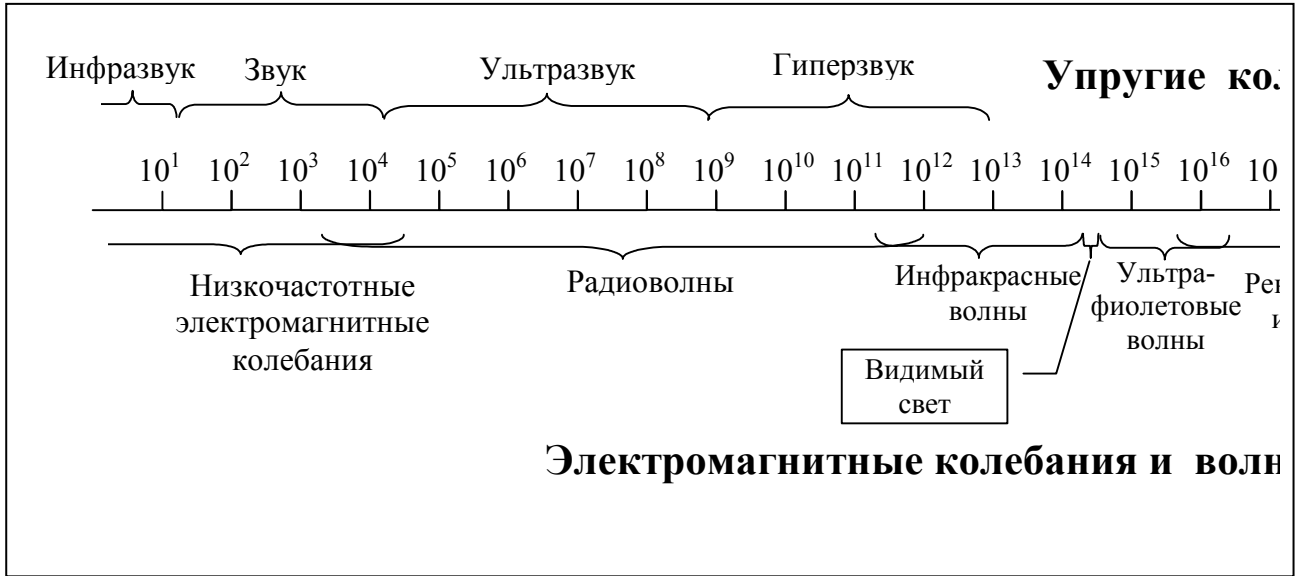


Рис.1.2. Распределение упругих и электромагнитных волн по частоте

токи на входе и выходе по сути синфазны, и, следовательно, волновые процессы, связанные с задержкой на прохождение линии, в них явно не проявляются. Однако даже на этих частотах законы электродинамики позволяют рассчитать емкость конденсатора, собственную и взаимную индуктивность катушек колебательных контуров, их добротность.

Электромагнитные волны радиодиапазона – это колебания от достаточно низких частот ($f=3 \cdot 10^3$ Гц) до крайне высоких ($f=3 \cdot 10^{11}$ Гц). Источником радиоволн являются токи в проводниках и электронных потоках (генераторы радиочастот). Диапазон частот радиоволн ограничен невозможностью их распространения на достаточно большие расстояния. Нижняя частота ограничена критической частотой сферического волновода, образованного земной поверхностью и нижним слоем ионосферы. На высоких частотах резко возрастает затухание за счет взаимодействия электромагнитных колебаний с атомами и молекулами атмосферы. Волны этого частотного диапазона широко используются в радиотехнике, электронике, в системах связи.

До диапазона инфракрасных волн процессы излучения и поглощения электромагнитных волн описываются законами электродинамики. На более высоких частотах доминируют процессы, имеющие квантовую природу, а в диапазоне оптического и тем более рентгеновского и γ -излучения процессы могут быть описаны только на основе дискретных представлений. Анализом этих явлений занимается квантовая электродинамика.

1.3. Энергия и скорость волн

Движущаяся волна, подобно любому движущемуся объекту, несёт энергию от одной точки пространства к другой (от источника к приёмнику). При этом перенос энергии происходит без переноса вещества среды, хотя сама среда вовлечена в волновой процесс передачи энергии. Величина энергии, переносимой волной, может меняться в широких пределах. Так, плотность потока мощности электромагнитного поля, создаваемого лазером, может составлять до 10^{10} Вт/м² вблизи электрического пробоя воздуха. Мощность же звуковых волн человеческого голоса очень незначительна. Например,

интенсивность звуковых волн на пороге слышимости их человеком на частоте $f=1\text{кГц}$ составляет всего 10^{-12}Вт/м^2 .

Волна распространяется от одной точки к другой за определённое время с конечной скоростью. Скорость электромагнитных волн очень велика и в вакууме равна $3\cdot 10^8\text{ м/с}$. Скорость акустических волн на несколько порядков меньше. Например, звуковые волны распространяются в сухом воздухе при температуре $t=0^{\circ}\text{C}$ со скоростью 331м/с .

1.4. Линейные и нелинейные волны

Волна называется **линейной**, если свойства среды для этой волны не зависят от интенсивности волны. Линейные волны не влияют на прохождение других волн и распространяются независимо друг от друга без каких-либо искажений. Это можно проиллюстрировать следующим опытом. Если бросить в воду два камешка, то расходящиеся от них круги не влияют друг на друга. Одна группа волн без изменений проходит через другую. Когда двое разговаривают между собой, звуковые волны их голосов не отскакивают друг от друга. Одна звуковая волна проходит через другую. Аналогично ведут себя линейные электромагнитные волны. Пространство заполнено электромагнитными волнами телевизионных и радиовещательных центров, систем сотовой связи, имеющих различную частоту и разное направление распространения.

Для линейных волн выполняется принцип суперпозиции или наложения волн. Параметры среды и скорость линейной волны не зависят от её интенсивности. Для линейных волн существует единый теоретический подход независимо от их природы.

Нелинейная волна – это волна, под действием которой меняются свойства среды и соответственно меняются свойства самой волны. Это обычно происходит при большой интенсивности волны.

1.5. Волновое уравнение Даламбера

Распространение волн в среде описывается волновым уравнением Даламбера. Это дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Без учёта источника волны волновое уравне-

ние является однородным. Оно может быть как векторным, так и скалярным.

$$\nabla^2 S - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0,$$

где S - функция возмущения, изменяющаяся и в пространстве, и во времени;

∇ - оператор Лапласа;

V - скорость распространения волны.

Решение волнового уравнения представляет собой произвольную функцию аргумента $(t \pm r/V)$ и записывается в виде прямой и обратной бегущих волн, где r – координата направления распространения волны, f – функция, вид которой определяется характером возмущения S . Таким образом:

$$S = f_1(t - r/V) + f_2(t + r/V).$$

Первое слагаемое представляет собой прямую волну, бегущую вдоль увеличения координаты r , второе – волну, бегущую в обратном направлении. Выбор физического решения выполняется на основе знания местоположения источника. Вывод волнового уравнения и определение скорости распространения волн будет приведён в разд. 2.3.

1.6. Гармоническая волна и ее параметры

Гармоническая волна – волна, изменяющаяся во времени по гармоническому закону (монохроматическое колебание или колебание одной частоты). Для анализа распространения сигналов различной формы в цепях радиотехнических устройств, а также распространения их через открытое пространство широко применяется метод преобразования Фурье. В соответствии с этим методом сигнал, имеющий произвольную временную зависимость, раскладывается в ряд Фурье для периодических сигналов или интеграл Фурье для одиночных сигналов. Исследуемый сигнал представляется в виде суммы синусоидальных и косинусоидальных гармоник с различными амплитудами. Если коэффициент передачи цепи известен, то выходной сигнал также представляется в виде суммы синусоидальных и коси-

нусоидальных гармоник уже с другими амплитудами и фазами, величина которых зависит от комплексного коэффициента передачи цепи на данной частоте. Рассмотренный подход используется во всех современных пакетах компьютерного моделирования радиотехнических цепей и устройств. В связи с этим гармонический сигнал является основополагающим для анализа любых электрических цепей, волновых процессов в различных системах и свободном пространстве. Кратко остановимся на основных определениях и понятиях гармонического колебания.

Период колебания (T , с) – время, за которое осуществляется полный цикл колебания (рис.1.3).

Длина волны (λ , м) – наименьшее расстояние между двумя максимумами или минимумами возмущения в пространстве (рис.1.4).

Период колебания связан с длиной волны в среде по формуле

$$T = \frac{\lambda}{V}, \quad (1.1)$$

где V , м/с - скорость распространения волны в данной среде. Период колебания обратно пропорционален частоте

$$T = \frac{1}{f}. \quad (1.2)$$

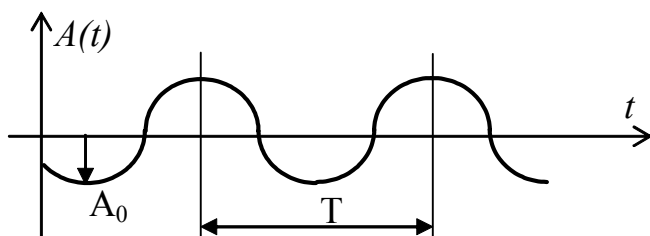


Рис.1.3. Изменение гармонического сигнала во времени

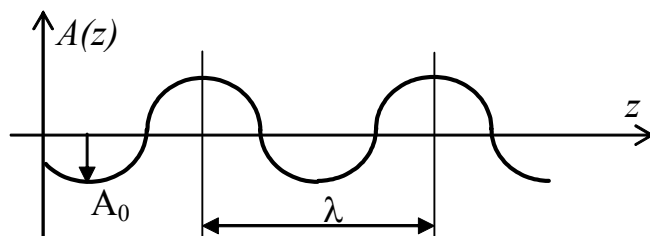


Рис.1.4. Изменение гармонического сигнала в пространстве

Число длин волн, укладываемых на расстоянии 2π в метрах, называется **волновым числом** k , м^{-1} :

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}. \quad (1.3)$$

Гармонически изменяющуюся во времени волну, распространяющуюся, например, в направлении оси z , можно описать в следующем виде:

$$A(t) = A_0 \cdot \cos(\omega t - k z + \varphi), \quad (1.4)$$

где максимальное отклонение колебания относительно равновесного состояния называется **амплитудой** A_0 . Размерность амплитуды определяется природой гармонического колебания, например, это может быть паскаль (Па) для звукового давления, метр (м) для колеблющейся пружины или вольт на метр (В/м) для напряженности электрического поля радиоволны. Круговая частота, с^{-1} , определяется по формуле

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f.$$

Выражение, стоящее в скобках (1.4), называется **фазой колебания** и определяет мгновенное состояние колебания, т. е. именно в данный момент времени. Константа φ называется **начальной фазой** колебания, и ее значение обычно определяется источником колебаний.

В среде с потерями распространяющаяся волна часть своей энергии отдает веществу среды, при этом амплитуда поля уменьшается. Это может быть учтено введением зависимости $A_0(z) = A_0 \cdot e^{-\alpha z}$, где α - коэффициент затухания, м^{-1} .

Волна, распространяющаяся в трехмерном пространстве, характеризуется понятием «фронт волны». **Фронт волны** – это поверхность, на которой волновой процесс имеет одинаковую фазу колебания. По виду фронта волны (или эквифазной поверхности) можно выделить плоские, цилиндрические и сферические волны.

Если амплитуда волны во всех точках фронта одинаковая, волна называется **однородной**.

Распространение волны происходит в направлении, перпендикулярном поверхности фронта. Плоская волна идет в одном направлении по нормали к ее фронту. Цилиндрическая и сферическая волны расходятся радиально, соответственно в цилиндрической и сферической системах координат. Цилиндрическая и сферическая волны на-

зываются расходящимися. Амплитуда сферической волны убывает обратно пропорционально расстоянию от источника, а цилиндрическая – обратно пропорционально квадратному корню расстояния.

Для характеристики интенсивности воздействия волны вводится понятие плотности потока энергии волны. **Плотность потока энергии (или интенсивность) волны** – это энергия, Дж, переносимая волной через единицу перпендикулярно ориентированной поверхности, м^2 , за единицу времени, с. Плотность потока энергии пропорциональна квадрату амплитуды волны, $\text{Вт}/\text{м}^2$:

$$\vec{I} = \vec{e}_0 \alpha \cdot A_0^2, \quad (1.6)$$

где α - коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды и типа волны. Единичный вектор \vec{e}_0 показывает направление распространения энергии. Таким образом, **вектор плотности потока энергии** показывает направление распространения энергии волны, а его модуль – плотность потока энергии. В технической литературе этот вектор называется вектором Умова для плотности потока энергии акустических волн и вектором Пойнтинга для электромагнитных волн.

1.7. Волновые явления

Акустические и электромагнитные волны, распространяющиеся в различных средах и устройствах, подчиняются единым волновым законам. Это явления возбуждения волн конкретными источниками, отражения и преломления волн на границе раздела сред, рассеяние на неоднородностях, рефракция (искривление траектории распространения волн), поглощение энергии, интерференция.

Распространение волн любой природы легко понять и объяснить, если обратиться к принципу Гюйгенса: каждая точка среды, вовлеченная в волновое движение, становится источником новой волны, называемой элементарной волной. Наблюдаемый волновой фронт представляет собой результат сложения множества элементарных волн (рис.1.5). Принцип Гюйгенса справедлив для всех видов волн, в том числе для акустических и электромагнитных.

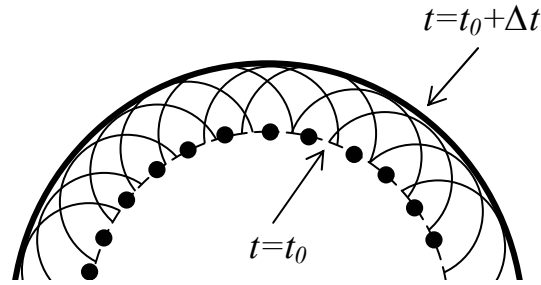


Рис.1.5. Положение фронта волны в разные моменты времени, определяемое на основе принципа Гюйгенса

Направление распространения волны обычно называют лучом. Волновой фронт перпендикулярен лучу. У цилиндрических и сферических волн, распространяющихся от источника возбуждения, лучи направлены радиально, а волновые фронты представляют собой соответственно цилиндры или сферы (рис.1.6, а). В случае плоского или удаленного источника возникают плоские волны. В них лучи параллельны, а волновые фронты представляют собой плоскости (рис.1.6, б).

Если на пути распространения волны встречается граница со средой, свойства которой отличаются от свойств среды распространения, наблюдается эффект частичного или полного отражения, а также частичного (а в некоторых случаях и полного) прохождения во вторую среду. Поскольку фронт волны перпендикулярен направлению распространения волны в однородной среде, то из простых геометрических построений доказывается равенство углов падения и отражения волн (рис.1.7). Однако в отличие от электромагнитных волн для акустических в ряде случаев может наблюдаться эффект расщепления волн и появление волнового луча, отраженного под другим углом (см. разд. 4.3).

Направление распространения преломленных волн зависит от соотношения скорости распространения волн в первой и второй средах (рис.1.8). Анализ поведения волн на границе раздела сред легко выполнить на основе применения принципа Гюйгенса и рассмотрения элементарных волн, возбуждаемых на границе.

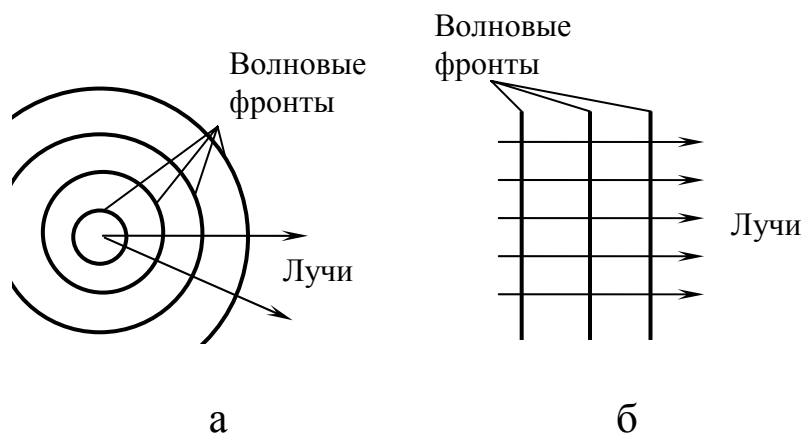


Рис.1.6. Волновые фронты и лучи в радиально распространяющейся волне (а) и плоской волне (б)

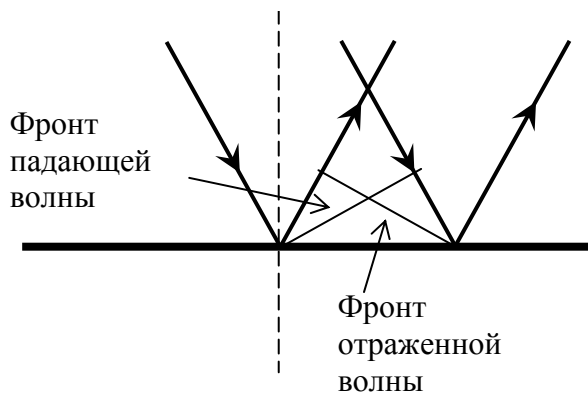


Рис.1.7. Отражение плоской волны на границе раздела сред

Если свойства среды, влияющие на скорость распространения волны, меняются, то может наблюдаться такое явление, как рефракция. **Рефракцией** называется искривление траектории распространения волны в неоднородной среде.

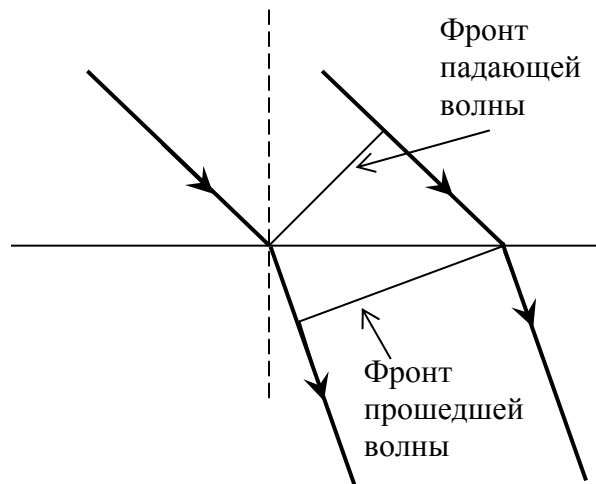


Рис.1.8. Преломление плоской волны на границе раздела сред

Если на пути распространения волны встречается какое-либо тело, то это приводит к нарушению структуры поля. Например, наблюдается эффект огибания волнами препятствия. В физике подобное явление называют **дифракцией**. Возникающая при этом картина поля существенно зависит от соотношения размеров препятствий и длины волны. На рис.1.9 показано, как меняется структура поля плоской волны, «просачивающейся» через отверстие малых размеров. В ряде случаев анализ дифрагированного поля можно вновь выполнить на основе рассмотрения элементарных волн и принципа Гюйгенса.

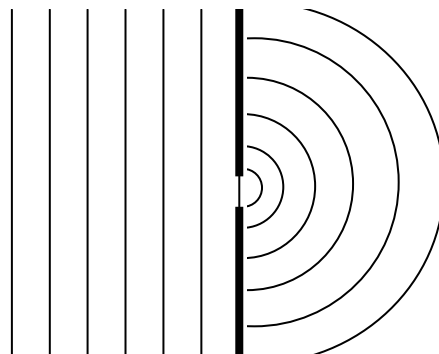


Рис.1.9. Дифракция плоской волны на отверстии малых размеров

Возникновение дополнительных акустических или электромагнитных полей в результате дифракции соответствующих волн на препятствиях, помещенных в среду, на неоднородностях среды, а

также на неровных и неоднородных границах сред, называется **рассеянием** волн. При рассеянии результирующее поле можно представить в виде суммы первичной волны, существовавшей в отсутствие препятствий, и рассеянной (вторичной) волны, возникшей в результате взаимодействия первичной волны с препятствиями. Если препятствий много, то общая картина поля образуется суммированием повторно и многократно рассеянных волн.

Еще одно важное понятие, используемое в теории волновых процессов, – интерференция волн. **Интерференцией** волн называется сложение в пространстве двух или нескольких волн, при котором в разных точках пространства получается усиление или ослабление амплитуды результирующей волны. Интерференция наблюдается у волн любой природы, в том числе у акустических и электромагнитных.



Рис.1.10. Интерференционная картина сложения волн двух источников

В первой части настоящего пособия основное внимание уделено акустическим волнам. Теория акустических волн даётся в рамках линейной акустики, т.е. акустики малых амплитуд изменения физических величин. Отмечены особенности распространения акустических волн по сравнению с электромагнитными волнами.

Глава 2. Продольные акустические волны в неограниченной среде

Основные величины акустического поля

Акустические волны могут распространяться в любых средах, кроме вакуума. Отсутствие акустических волн в вакууме объясняется отсутствием давления среды. Жидкие и газообразные среды обладают упругостью объема. В отличие от твердых сред они не имеют формы и, следовательно, не обладают упругостью формы. Жидкости и газы расширяются или сжимаются только в направлении распространения возмущения (волны), и колебания частиц среды происходит вдоль этого направления. Упругая волна в этих средах представляет собой продольную волну с чередующимися областями сжатия и разрежения среды.

Твердые тела под действием механических сил изменяют свои размеры и форму. Возможны различные деформации твердых тел – сжатие, растяжение, сдвиг, изгиб и кручение. Однако в теории упругости доказывается, что все виды деформаций могут быть сведены лишь к двум: продольной (растяжение-сжатие) и сдвиговой деформации. Акустическая волна в твердой среде представляет собой комбинацию продольной и поперечной (сдвиговой) волн. Анализ таких волн достаточно сложный и в краткой форме будет дан в разделе об упругих волнах в твердых телах. В частных случаях, например в монокристаллах, при распространении акустической волны вдоль осей кристалла наблюдаются либо продольная, либо поперечная волны. Это позволяет рассмотреть распространение продольных волн и в твердых средах уже в этой главе.

Рассмотрим распространение продольных волн в жидких и газообразных средах, а также распространение продольных волн в твердых телах при отсутствии сдвиговых волн. Считаем, что объем среды неограничен, а также на начальном этапе трением частиц среды (акустическими потерями) пренебрегаем. Наличие областей сжатия и разрежения среды приводит к тому, что давление и плотность в каждой точке будут меняться согласно волновому процессу. Переменные давление и плотность среды представим в виде

$$p = p_0 + p_a,$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_a,$$

где p_0, ρ_0 – постоянные равновесные давления и плотность (в отсутствие волны);

p, ρ – мгновенные давление и плотность, которые в моменты сжатия среды больше p_0, ρ_0 , в моменты разряжения меньше p_0, ρ_0 ;

p_a, ρ_a – переменные давление и плотность самой акустической волны. Полагаем, что амплитуда возмущений мала и выполняется условие

$$p_a \ll p_0, \rho_a \ll \rho_0.$$

Акустическое давление p_a – давление, дополнительно возникающее в газообразной или жидкой среде при прохождении через нее акустических волн. В звуковом диапазоне на частоте $f = 1$ кГц (ухо человека весьма чувствительно к этой частоте) амплитуда акустического давления на пороге слышимости уха (слабый звук)

$p_{am} = 2 \cdot 10^{-5}$ Па $\left(1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right)$. На той же частоте $f = 1$ кГц на поро-

ге болевого ощущения (сильный звук) амплитуда акустического давления $p_{am} = 300$ Па. В системах акустической связи и вещания имеют дело с акустическим давлением, амплитуда которого, по крайней мере, в тысячу раз меньше, чем нормальное атмосферное давление.

Ввиду того, что давление неодинаково в соседних точках среды, ее частицы стремятся сместиться в сторону меньшего давления, и возникает колебательное движение частиц около своего положения равновесия. Колебательную скорость частиц представим в виде

$$v = \frac{du}{dt},$$

где u – смещение колеблющейся частицы относительно положения равновесия.

Колебательная скорость частиц значительно меньше скорости распространения акустической волны. На частоте равной $f = 1$ кГц, при амплитуде акустического давления $p_{am} = 300$ Па (порог болевого ощущения) амплитуда колебательной скорости в воздухе

$v_m = 73 \frac{\text{см}}{\text{с}}$, а смещение $u_m = 0,01$ см.

Отношение скорости частиц к скорости волны называется акустическим числом Маха:

$$M_{\text{ак}} = \frac{v_m}{V_a},$$

где V_a – скорость акустической волны. Скорость продольной акустической волны будем обозначать как V_l . Акустическое число Маха всегда меньше единицы. При скорости звука в воздухе $V_l = 342$ м/с при температуре 18°C и колебательной скорости $v_m = 73 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ имеем $M_{\text{ак}} \approx 0,021$, т.е. малую величину даже при таком сильном звуке.

Три величины – акустические давление и плотность, колебательная скорость, изменяясь во времени и в пространстве, определяют волновой процесс в упругих жидких и газообразных средах.

Уравнения акустического поля

Рассмотренные выше акустические величины связаны между собой физическими законами, характеризующими изменение состояния упругой среды при распространении волны. Исходными при этом являются три закона (уравнения) [1]. В рамках линейной акустики и в отсутствие потерь эти уравнения имеют следующий вид.

Уравнение движения частиц сплошной среды – второй закон Ньютона для элемента упругой деформированной среды:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p_a = 0. \quad (2.1)$$

Уравнение непрерывности – закон сохранения массы вещества

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v} = 0. \quad (2.2)$$

Уравнение состояния – закон упругости Гука при малых деформациях

$$p_a = K \frac{\rho_a}{\rho_0}, \quad (2.3)$$

где $K \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$ – модуль объемной упругости (иногда его называют

модулем всестороннего сжатия), малая безразмерная величина $\frac{\rho_a}{\rho_0}$

имеет смысл деформации и обычно обозначается через S . Выражение (2.3) является частной записью закона Гука для продольных волн. Отметим уже здесь, что для акустической волны в любой упругой среде малые напряжения (сила, приложенная к единице площади поверхности среды) пропорциональны малым деформациям, и закон Гука может быть записан следующим образом:

$$T = a S,$$

где T – напряжение, $\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$; a – упругая постоянная среды,

$\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$; S – деформация. В некоторых твердых средах, например в кристаллах, эти три величины являются тензорами. Об этом пойдет речь в разделе, посвященном особенностям распространения акустических волн в твердых средах.

Волновое уравнение Даламбера. Скорость распространения продольной акустической волны

Уравнения (2.1)–(2.3) являются исходными при выводе волнового уравнения и определения скорости распространения продольной акустической волны в произвольной среде. Эти уравнения взаимосвязаны. При выделении интересующей нас физической величины, характеризующей волновой процесс, мы приходим к дифференциальным уравнениям второго порядка, называемым волновыми уравнениями Даламбера.

Продифференцируем уравнение непрерывности (2.2) по времени:

$$\frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} + \rho_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0. \quad (2.4)$$

Из закона Гука (2.3) плотность ρ_a выразим через акустическое давление p_a

$$\rho_a = \frac{\rho_0}{K} p_a. \quad (2.5)$$

Из уравнения движения (2.1) выделим производную колебательной скорости по времени

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p_a. \quad (2.6)$$

Выражения (2.5) и (2.6) подставим в уравнение (2.4) и учтем, что $\text{div grad } p_a = \nabla^2 p_a$ (см. Прил.1). В результате получим волновое уравнение Даламбера для акустического давления в виде

$$\nabla^2 p_a - \frac{\rho_0}{K} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0.$$

Коэффициент перед второй производной по времени $\frac{\rho_0}{K}$ имеет размерность секунда в квадрате на квадратный метр ($\text{с}^2/\text{м}^2$) и представляет собой величину, обратную квадрату скорости распространения продольной волны $V_l = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$, м/с.

$$\nabla^2 p_a - \frac{1}{V_l^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0. \quad (2.7)$$

Аналогично из исходных уравнений (2.1)–(2.3) можно получить волновое уравнение для колебательной скорости. Продифференцируем по времени уравнение (2.1):

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad } \frac{\partial p_a}{\partial t} = 0. \quad (2.8)$$

Из уравнений (2.3) и (2.2) выделим производную

$$\frac{\partial p_a}{\partial t} = \frac{K}{\rho_0} \frac{\partial \rho_a}{\partial t} = \frac{K}{\rho_0} (-\rho_0 \text{div } \vec{v}) \quad (2.9)$$

и подставим ее в (2.8). Учтем, что в продольной волне у вектора колебательной скорости отсутствует вихревая компонента и $\text{rot } \vec{v} = 0$.

Окончательно получаем волновое уравнение Даламбера для колебательной скорости в следующем виде:

$$\nabla^2 \vec{v} - \frac{1}{V_l^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.10)$$

Аналогичный вид будет иметь волновое уравнение и для возмущенной акустической плотности:

$$\nabla^2 \rho_a - \frac{1}{V_l^2} \frac{\partial^2 \rho_a}{\partial t^2} = 0. \quad (2.11)$$

Волновые уравнения (2.7), (2.10), (2.11) представляют собой дифференциальные уравнения второго порядка, решением которых являются произвольные функции вида $f\left(t \pm \frac{r}{V_l}\right)$, где нижний знак соответствует волне, бегущей вдоль оси r , а верхний знак – волне, бегущей в противоположном направлении. Выбор знака определяется расположением источника акустических волн относительно точки наблюдения.

При выводе волновых уравнений, был сделан ряд допущений, к числу которых относятся малые изменения физических величин возмущенной волновым процессом среды, неподвижность среды, безвихревой характер движения частиц среды. Поскольку физические величины \vec{v} , p_a и ρ_a , характеризующие волновой процесс, связаны между собой уравнениями (2.1)-(2.3), то при дальнейшем анализе достаточно работать лишь с двумя волновыми уравнениями (2.7) и (2.10). При выводе волновых уравнений было получено выражение для расчета скорости распространения продольной акустической волны, зависящей от коэффициента объемной упругости и удельной плотности среды:

$$V_l = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}. \quad (2.12)$$

Это выражение остается справедливым и для расчета скорости продольной волны в твердой среде. Например, при температуре $t = 0^\circ\text{C}$ в воздухе (модуль объемной упругости $K = 1,4 \cdot 10^5$ Па, удельная плотность $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$) скорость звука $V_l = 331,2$ м/с; в воде

($K = 2,25 \cdot 10^9$ Па, $\rho_0 = 1000$ кг/м³) скорость звука $V_l = 1500$ м/с; а в сапфире ($K = 4,92 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho_0 = 3990$ кг/м³) скорость звука гораздо выше - $V_l = 11,1$ км/с.

В жидких средах можно использовать формулу расчета скорости акустических волн через коэффициент сжимаемости жидкости χ , $\left[\frac{\text{М}^2}{\text{Н}} \right]$, являющегося величиной обратной к коэффициенту объемной упругости K :

$$V_l = \sqrt{\frac{1}{\chi \rho_0}}. \quad (2.13)$$

В газообразных средах фазовую скорость продольной акустической волны можно рассчитать по формуле

$$V_l = \sqrt{\gamma R T}, \quad (2.14)$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ – показатель адиабаты – отношение удельных теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме; $R = c_p - c_v$ – газовая постоянная, $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right]$; T – температура среды в кельвинах.

Для воздуха при температуре $T = 273$ К ($t = 0^\circ\text{C}$) показатель адиабаты $\gamma = 1,4$, газовая постоянная $R = 287 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$, скорость звука $V_l = 331,2$ м/с.

При любой другой температуре $t^\circ\text{C}$, если $|t| \ll 273^\circ\text{C}$, скорость акустической волны может быть определена с помощью соотношения

$$\frac{V_l}{331,2} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\gamma R \cdot 273}} = \sqrt{\frac{273 + t}{273}} = \sqrt{1 + \frac{t}{273}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{t}{273},$$

или

$$V_l = 331,2 + 0,6t, \quad \frac{\text{М}}{\text{с}}. \quad (2.15)$$

При увеличении температуры на 1°C скорость звука в воздухе увеличивается на $0,6$ м/с.

С учетом того, что плотность газа ρ_0 зависит от давления p_0 и температуры T

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R T},$$

выражение (2.14) может быть записано в виде

$$V_l = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (2.14 \text{ а})$$

Газы легко деформируемы, модуль объемной упругости K мал, и скорость волны в газах заметно меньше, чем в других средах. В расчетные формулы скоростей (2.12) – (2.14) не входит частота, и соответственно продольные волны не обладают дисперсией.

Волновое уравнение Гельмгольца.

Уравнение плоской акустической волны

Для волнового процесса, изменяющегося во времени по гармоническому закону с частотой ω , используется комплексное представление. Функция времени в этом случае определяется множителем $e^{j\omega t}$:

$$p_a = \text{Re}(\dot{p}_a e^{j\omega t}), \quad \vec{v} = \text{Re}(\dot{\vec{v}} e^{j\omega t}), \quad \rho_a = \text{Re}(\dot{\rho}_a e^{j\omega t}).$$

Величины \dot{p}_a , $\dot{\vec{v}}$, $\dot{\rho}_a$ называются комплексными амплитудами. Сами они уже не зависят от времени. Выполнив дифференцирование по времени в волновых уравнениях (2.7), (2.10) и сократив $e^{j\omega t}$, получим волновые уравнения Гельмгольца для комплексных амплитуд:

$$\nabla^2 \dot{p}_a + k^2 \dot{p}_a = 0, \quad (2.16)$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{v}} + k^2 \dot{\vec{v}} = 0, \quad (2.17)$$

где $k = \frac{\omega}{V_l}$ – постоянная распространения (волновое число), $\left[\frac{1}{\text{м}} \right]$.

Волновое число k позволяет вычислить длину волны в рассматриваемой среде:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{V_l}{f}.$$

Решение уравнения Гельмгольца представляет собой бегущую гармоническую волну. Для плоской гармонической волны, распространяющейся, например, вдоль оси z , уравнения (2.16), (2.17) принимают вид

$$\frac{\partial^2 \dot{p}_a}{\partial z^2} + k^2 \dot{p}_a = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{v}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{v}_z = 0. \quad (2.19)$$

Решение уравнения Гельмгольца представляет собой бегущую гармоническую волну, в данном случае бегущую вдоль оси z :

$$\dot{p}_a(z) = p_{am} e^{\pm jkz},$$

$$\dot{v}_z(z) = v_{zm} e^{\pm jkz}.$$

Выбор знака в показателе экспоненты зависит от взаимного расположения источника колебаний и точки наблюдения. Знак «минус» соответствует волне, распространяющейся вдоль оси z . Знак «плюс» соответствует волне, бегущей в сторону, противоположную оси z .

Для плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси z , с учетом гармонической временной зависимости $e^{j\omega t}$ выражения, описывающие акустическое поле, могут быть записаны следующим образом:

$$\dot{p}_a(z, t) = p_{am} e^{-jkz} e^{j\omega t}, \quad (2.20)$$

$$\dot{v}_z(z, t) = v_{zm} e^{-jkz} e^{j\omega t}. \quad (2.21)$$

В бегущей вдоль оси z продольной акустической волне колебательная скорость частиц среды имеет лишь одну составляющую v_z в направлении распространения волны.

Смещение частиц среды, как показано в разд. 2.1, связано с колебательной скоростью соотношением

$$v = \frac{du}{dt}.$$

Для гармонического колебания и акустической волны, бегущей вдоль оси z , это соотношение можно переписать следующим образом:

$$\dot{v}_z(z, t) = \frac{d\dot{u}_z(z, t)}{dt} = \frac{d(u_{mz} e^{-jkz} e^{j\omega t})}{dt} = j\omega u_{mz} e^{-jkz} e^{j\omega t} . \quad (2.22)$$

Сравнивая между собой выражения (2.21) и (2.22), можно записать связь между амплитудами смещения и колебательной скорости частиц среды

$$v_{mz} = \omega u_{mz} . \quad (2.23)$$

Наличие мнимой единицы в формуле (2.22) говорит о сдвиге фазы колебания смещения и скорости на 90 градусов, т.е. момент времени максимума колебательной скорости соответствует нулевому смещению и, наоборот, при максимальном смещении частицы относительно ее положения равновесия колебательная скорость равна нулю. Это легко понять, анализируя выражения, связывающие мгновенные значения (в фиксированный момент времени t) колебательной скорости и смещения:

$$v_z(z, t) = v_{mz} \cos(\omega t - kz) = \omega \cdot u_{mz} \cos(\omega t - kz + 90^\circ) = \omega u_z(z, t) .$$

Для акустической волны, бегущей в произвольном направлении, заданном осью ζ , в декартовой системе координат выражения для давления и колебательной скорости можно записать в виде

$$\dot{p}_a = p_{am} e^{j\omega t} = p_{am} e^{-jk(x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3)} e^{j\omega t} , \quad (2.24)$$

$$\dot{\vec{v}} = \vec{\zeta}_0 v_m e^{-jk\zeta} e^{j\omega t} = \quad (2.25)$$

$$= v_m (\vec{x}_0 \cos \alpha_1 + \vec{y}_0 \cos \alpha_2 + \vec{z}_0 \cos \alpha_3) e^{-jk(x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3)} e^{j\omega t} ,$$

где $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0, \vec{\zeta}_0$ – орты; α_i – углы между направлением ξ и положительными осями x, y, z ,

Акустический импеданс

Вновь рассмотрим акустическую волну, распространяющуюся вдоль оси z . Мгновенные значения компонентов акустического поля могут быть получены выделением реальной части из выражений (2.20), (2.21):

$$p_a(z, t) = p_{am} \cos(\omega t - k z), \quad (2.24)$$

$$\vec{v}(z, t) = \vec{z}_0 v_{zm} \cos(\omega t - k z). \quad (2.25)$$

Из полученных выражений видно, что акустическое давление и колебательная скорость изменяются синфазно. Связь амплитуд колебательной скорости частиц среды и акустического давления может быть определена из уравнения движения частиц (2.1):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p_a = 0. \quad (2.26)$$

После дифференцирования по времени выражения (2.25) и вычисления $\text{grad } p_a = \vec{z}_0 \frac{\partial p_a}{\partial z}$ (Прил. 1) выражение (2.26) принимает вид

$$-\vec{z}_0 v_m \omega \sin(\omega t - k z) + \vec{z}_0 \frac{1}{\rho_0} p_{am} k \sin(\omega t - k z) = 0.$$

Последнее выражение позволяет определить связь между амплитудами акустического давления и колебательной скорости плоской волны:

$$p_{am} = \frac{\rho_0 v_m \omega}{k} = (\rho_0 V_l) v_m. \quad (2.27)$$

Коэффициентом связи является произведение невозмущенной плотности среды и скорости распространения акустической волны в среде, в данном случае скорости продольной акустической волны. Этот коэффициент пропорциональности принято называть **акустическим сопротивлением среды** для плоской волны. Данный термин связан с аналогией акустических и электрических величин как разных видов колебательных процессов в природе.

В теории электромагнитного поля для анализа распространения волн в линиях передачи вводится понятие волнового сопротивления. Это некий коэффициент, равный отношению напряжения и тока волны в линии передачи. Поскольку напряжение в линии имеет размерность вольт (В), а ток – ампер (А), их отношение имеет размерность ом (Ом). По этой причине коэффициент, связывающий эти параметры, получил наименование «**волновое сопротивление**» и обозначается Z_0 .

Акустическое сопротивление, или **акустический импеданс**, – это коэффициент, связывающий между собой акустическое давление и колебательную скорость частиц среды:

$$Z_a = \frac{p_a}{v}, \quad \left[\frac{\text{Давление}}{\text{Скорость}} \right] = \left[\frac{\text{Н/м}^2}{\text{м/с}} \right] = \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}} \right] = \left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \right]. \quad (2.28)$$

Формула (2.28) справедлива как для продольных, так и для сдвиговых акустических волн, распространяющихся в упругой среде, причем не только плоских волн.

Если сравнивать между собой уравнения, описывающие распространение волны тока и напряжения в электрической линии передачи, называемые «телеграфными уравнениями», и уравнения для бегущей акустической волны (Табл.2.1), можно сделать вывод об их очевидной схожести. В курсе "Основы теории электрических цепей" показано, что любую достаточно длинную линию передачи можно представить в виде периодической структуры из последовательно включенных индуктивностей L и параллельно включенных емкостей C (рис.2.1).

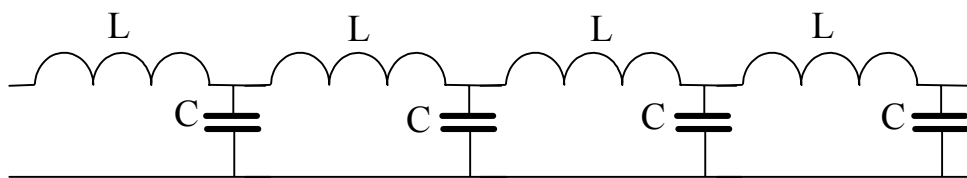


Рис. 2.1. Эквивалентная схема электрической линии передачи

Эти индуктивности и емкости называются погонными, т.е. относящимися к единице длины линии передачи.

Для плоской акустической волны, распространяющейся вдоль оси z (выражения (2.20)–(2.21)), и эквивалентных напряжений и то-

ков плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси z , можно составить следующую сравнительную таблицу, иллюстрирующую связь акустических и электромагнитных параметров.

Таблица 2.1

Связь параметров акустических волн и волн напряжения и тока
в линии

Для акустических волн	Для волн напряжения и тока
$\frac{\partial \dot{p}_a(z)}{\partial z} = j\omega\rho_0\dot{v}(z)$	$\frac{d\dot{U}(z)}{dz} = -j\omega L\dot{I}(z)$
$\frac{\partial \dot{v}(z)}{\partial z} = j\omega\frac{\dot{p}_a}{K}$	$\frac{d\dot{I}(z)}{dz} = -j\omega C\dot{U}(z)$
$k = \omega\sqrt{\frac{\rho_0}{K}}$	$\beta = \omega\sqrt{LC}$
$Z_a = \sqrt{\rho_0 K}$	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Сравнивая между собой выражения, стоящие в левом и правом столбцах приведенной выше таблицы, можно заметить, что при взаимных заменах $p_a \leftrightarrow U$, $v \leftrightarrow I$, $\rho_0 \leftrightarrow L$, $1/K \leftrightarrow C$ уравнения для электромагнитной волны в линии передачи и плоской акустической волны поменяются местами, т.е. полученные выражения полностью эквивалентны.

Таким образом, упругой волне, распространяющейся в среде, можно поставить в соответствие некоторую эквивалентную линию передачи и для решения задач с акустическими волнами широко использовать разработанные алгоритмы и программы анализа распространения волн в электрических цепях.

Для плоской продольной волны выражение для расчета акустического сопротивления среды с учетом (2.27) может быть записано следующим образом:

$$Z_a = \frac{P_{am}}{v_m} = \rho_0 V_l.$$

Полученное соотношение остается верным и для плоских сдвиговых волн, если в нем скорость распространения продольной волны V_l заменить на скорость распространения сдвиговой волны V_t .

При нормальном атмосферном давлении и температуре $t = 20^0 \text{C}$ акустическое сопротивление воздуха $Z_a = 420 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$. В расходящихся

сферических и цилиндрических волнах акустическое давление и колебательная скорость частиц среды изменяются несинфазно и акустическое сопротивление становится комплексным:

$$\dot{Z}_a = R_a + j X_a = |\dot{Z}_a| e^{j\varphi},$$

где φ – сдвиг по фазе между давлением p_a и колебательной скоростью частиц среды v .

Для сферической волны модуль акустического сопротивления

$$|\dot{Z}_a| = \rho_0 V_l \cos \varphi, \quad \text{tg } \varphi = \frac{1}{k r}$$

не превышает акустического сопротивления этой же среды для плоской волны.

Для цилиндрической волны

$$|\dot{Z}_a| = \rho_0 V_l \cos \varphi, \quad \text{tg } \varphi = \frac{1}{2 k r}.$$

Разность фаз φ между давлением и колебательной скоростью в сферических и цилиндрических волнах быстро уменьшается с ростом расстояния r и увеличением частоты. В дальней зоне ($r \gg \lambda$) сдвиг фаз $\varphi = 0$, акустическое сопротивление становится вещественным и равным по величине акустическому сопротивлению среды для плоской волны.

Уравнение баланса энергии акустической поля. Интенсивность акустической волны

Для вывода закона сохранения энергии акустической волны воспользуемся уравнением движения частиц среды (2.1)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p_a = 0 \quad (2.29)$$

и уравнением закона сохранения массы вещества (2.2)

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \vec{v} = 0. \quad (2.30)$$

Величину акустической плотности из (2.3) выразим через давление и скорость распространения волны

$$\rho_a = \frac{p_a}{V_l^2} \quad (2.31)$$

и подставим это значение в уравнение (2.30). Перепишем исходные уравнения (2.29) и (2.30) в следующем виде:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } p_a = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{\rho_0 V_l^2} \frac{\partial p_a}{\partial t} + \text{div } \vec{v} = 0. \quad (2.33)$$

Умножим скалярно уравнение (2.32) на \vec{v} , а уравнение (2.33) на p_a . Суммируя полученные уравнения, с учетом Прил. 1, получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho_0 |\vec{v}|^2}{2} + \frac{p_a^2}{2 \rho_0 V_l^2} \right] + \text{div} (p_a \vec{v}) = 0. \quad (2.34)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой энергию акустической волны в единице объема среды, $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]$:

$$w = \frac{1}{2} \rho_0 |\vec{v}|^2 + \frac{1}{2} \frac{p_a^2}{\rho_0 V_l^2}, \quad (2.35)$$

Энергия акустической волны состоит из двух видов энергии: кинетической и потенциальной. Потенциальная энергия (энергия упругой деформации) определяется максимальным смещением колеблющихся частиц среды относительно положения равновесия и связана с силой, приложенной для перемещения частиц среды. Наглядная мо-

дель для данного случая – растянутая или сжатая пружина. Объемная плотность потенциальной энергии вычисляется по формуле, $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]$:

$$w_n = \frac{1}{2} \frac{p_a^2}{\rho_0 V_l^2},$$

Кинетическая энергия запасается в движущихся частицах среды и ее объемная плотность равна, $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} \right]$:

$$w_k = \frac{1}{2} \rho_0 \left| \vec{v} \right|^2 .$$

Произведение $p_a \vec{v}$, входящее в (2.34), определяет плотность потока энергии акустической волны, переносимую волной за единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению распространения волны. Вектор \vec{J} называется вектором Умова-Пойнтинга:

$$\vec{J} = p_a \vec{v} . \quad (2.36)$$

С учетом (2.35), (2.36) уравнение (2.34) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0 \quad (2.37)$$

и выражает закон сохранения энергии в дифференциальной форме. Проинтегрируем (2.37) по выделенному объему V среды, ограниченному поверхностью S . С учетом теоремы Остроградского-Гаусса (Прил. 1) для второго слагаемого уравнения (2.37) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V w \, dv + \oint_S \vec{J} \, d\vec{s} = 0 . \quad (2.38)$$

Приведенное выражение представляет собой запись закона сохранения энергии в интегральной форме (закон сохранения энергии для выделенного объема среды).

Модуль вектора Умова-Пойнтинга, Вт/м²:

$$J = |\vec{J}| = p_a |\vec{v}| = p_a v . \quad (2.39)$$

называется **интенсивностью (силой) звука**. Другое название этой величины – **плотность потока энергии акустической волны**.

Для расчета интенсивности акустической волны, изменяющейся во времени по гармоническому закону, воспользуемся комплексным представлением

$$p_a = \frac{1}{2} \dot{p}_a e^{j\omega t} + \frac{1}{2} p_a^* e^{-j\omega t},$$

$$v = \frac{1}{2} \dot{v} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} v^* e^{-j\omega t}.$$

Звездочкой в этих выражениях обозначено комплексное сопряжение.

Средняя за период интенсивность звука может быть вычислена следующим образом:

$$J_{cp} = \frac{1}{4} \int_0^T p_a v dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{p}_a v^*). \quad (2.40)$$

Мощность, переносимая акустической волной через поверхность S , охватывающую выделенный объем среды, равна

$$P = \int_S J_{cp} dS.$$

Для сферических и цилиндрических волн акустическое давление и колебательная скорость зависят от расстояния от источника до точки наблюдения вследствие расходимости волн, т.е.

$$\dot{p}_a = p_{am}(r) e^{-jkr},$$

$$\dot{v} = v_{am}(r) e^{-jkr} e^{-j\varphi},$$

где φ – сдвиг по фазе между акустическим давлением и колебательной скоростью.

Акустическое давление и колебательная скорость связаны между собой через акустическое сопротивление. Это позволяет получить еще одну полезную формулу

$$J_{cp} = \frac{1}{2} \frac{p_{am}^2(r)}{|\dot{Z}_a|} \cos \varphi. \quad (2.41)$$

Для плоской звуковой волны, распространяющейся в идеально упругой среде, акустическое сопротивление,

$$Z_a = \rho_0 V_l,$$

сдвиг фаз между давлением и колебательной скоростью $\varphi = 0$, амплитуда не зависит от расстояния и средняя за период интенсивность

$$J_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \frac{p_{\text{ам}}^2}{\rho_0 V_l} = \frac{1}{2} v_m^2 \rho_0 V_l.$$

В акустике звуковых колебаний принято говорить об уровне интенсивности звука, дБ, и характеризовать его как

$$L = 10 \lg \frac{J}{J_{\text{см}}}$$

относительно стандартного нулевого уровня с интенсивностью

$J_{\text{см}} = 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$. Величина $J_{\text{см}}$ получена на частоте $f = 1 \text{ кГц}$ для самых слабых звуков (порог слышимости человеческого уха) при акустическом давлении $p_{\text{ам}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$ и акустическом сопротивлении

воздуха $Z_a = \rho_0 V_l = 420 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$.

Относительный уровень интенсивности, дБ, в логарифмическом масштабе рассчитывается по формуле

$$\Delta L = L_1 - L_2 = 10 \lg \frac{J_1}{J_2}.$$

Особенности восприятия акустических волн различной интенсивности и частоты человеческим ухом и субъективные параметры звуковых волн рассматриваются в разд.6.

Для оценки качества экранировки звукового потока слоем материала вводится понятие коэффициента звукоизоляции. Коэффициентом звукоизоляции называется разность уровней интенсивности звука до и после прохождения звукоизоляционного материала. Коэффициент звукоизоляции, дБ:

$$D = 10 \lg \frac{J_1}{J_2}.$$

Численные значения коэффициента звукоизоляции приведены в табл.2.2.

Таблица 2.2

Численные значения коэффициента звукоизоляции
некоторых строительных материалов

Вид материала	Толщина, см	D , дБ
Кирпичная стена, оштукатуренная в 1/4 кирпича	9	42
Кирпичная стена, оштукатуренная в 1/2 кирпича	15	44
Бетонная плита	16	48
Толстое стекло	0,6	29
Одинарное окно		15
Двойное окно		30
Одинарная дверь		до 20
Двойная дверь		40

В случае нескольких источников звука равной интенсивности L полный уровень интенсивности равен, дБ:

$$L_{\Sigma} = L + 10 \lg n.$$

При сложении двух волн равного уровня общий уровень интенсивности увеличивается на 3 дБ. Интенсивность звука пропорциональна квадрату частоты и высоким частотам ультразвукового диапазона соответствуют большие интенсивности, что приводит к нагреву тел, подвергающихся воздействию ультразвука. Для цилиндрических волн интенсивность за счет расходимости звукового потока обратно пропорциональна расстоянию от источника, а для сферических волн - квадрату расстояния. Для стоячей волны интенсивность равна нулю.

Акустические потери

При распространении акустических волн в реальных твердых, жидких и газообразных средах возникают потери, приводящие к уменьшению энергии, переносимой этими волнами. Потери связаны с вязкостью и теплопроводностью упругих сред. Часть энергии переходит в тепло. Амплитуда акустической волны уменьшается вдоль направления распространения. Физически это обусловлено тем, что соседние частицы среды, колеблющиеся под воздействием акустической волны, движутся с различной скоростью и трутся друг о друга, вызывая повышенное теплоотделение.

Для расчета коэффициента затухания используются волновые уравнения для акустической волны в вязкой теплопроводящей среде. Исходным является уравнение движения частиц, которое отличается от уравнения движения частиц в идеально упругой среде (2.1) добавлением слагаемого, связанного с вязкостью и теплопроводностью среды [3]:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + V_l^2 \text{grad } \rho_a - b \nabla^2 \vec{v} = 0 \quad (2.42)$$

Здесь b – эффективный коэффициент вязкости:

$$b = \frac{4}{3} \eta + \eta' + x \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right),$$

где η – коэффициент сдвиговой (поперечной) вязкости, [Па·с];

η' – коэффициент объемной вязкости, [Па·с];

x – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);

c_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, Дж/(кг·К);

c_p – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, Дж/(кг·К).

Продифференцируем уравнение (2.42) по времени

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + \frac{V_l^2}{\rho_0} \text{grad } \frac{\partial \rho_a}{\partial t} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \vec{v} = 0. \quad (2.43)$$

Производную $\frac{\partial \rho_a}{\partial t}$ берем из уравнения непрерывности (2.2), которое имеет тот же вид, что и в средах без потерь:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \vec{v}$$

Подставляем данное соотношение в уравнение (2.43). Учитывая, что при безвихревом движении частиц среды $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V} = \nabla^2 \vec{V}$, получим

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - V_l^2 \nabla^2 \vec{v} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \vec{v} = 0 \quad (2.44)$$

Ограничимся решением уравнения (2.44) для плоской волны. Для плоской гармонической волны, распространяющейся, например, вдоль оси z , решение уравнения (2.44) ищем в виде

$$\dot{v}_z = v_m e^{j(\omega t - k z)}. \quad (2.45)$$

Подставим (2.45) в уравнение (2.44) и выполним дифференцирование. Учтем, что

$$\frac{\partial^2 \dot{v}_z}{\partial t^2} = -\omega^2 \dot{v}_z,$$

$$\nabla^2 \dot{v}_z = \frac{\partial^2 \dot{v}_z}{\partial z^2} = -k^2 \dot{v}_z,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \dot{v}_z = -j \omega k^2 \dot{v}_z.$$

После дифференцирования получим

$$-\omega^2 + V_l^2 k^2 + j \omega k^2 \frac{b}{\rho_0} = 0.$$

Откуда комплексное волновое число акустической волны

$$k^2 = \frac{\omega^2}{V_l^2 + j \frac{\omega b}{\rho_0}}.$$

При условии, что если $\frac{b \omega}{\rho_0 V_l^2} \ll 1$, что соответствует малому за-

туханию звука на расстоянии порядка длины волны, комплексное волновое число

$$\dot{k} = \sqrt{\frac{\omega^2}{V_l^2} \left[1 - j \frac{\omega b}{\rho_0 V_l^2} \right]} \cong \frac{\omega}{V_l} \left(1 - j \frac{1}{2} \frac{\omega b}{\rho_0 V_l^2} \right) = k - j \alpha.$$

Вещественная составляющая постоянной распространения, $\left[\frac{1}{\text{м}} \right]$,

$$k = \frac{\omega}{V_l},$$

представляет собой коэффициент фазы, позволяющий рассчитать длину волны, а мнимая часть α – коэффициент затухания, который можно вычислить по формуле, $\left[\frac{1}{\text{м}} \right]$,

$$\alpha = \frac{b \omega^2}{2 \rho_0 V_l^3} = \frac{\omega^2}{2 \rho_0 V_l^3} \left[\frac{4}{3} \eta + \eta' + x \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]. \quad (2.46)$$

Основной причиной затухания акустических волн является сила вязкого сопротивления между соседними частицами среды, обладающими различными скоростями, она учитывается первым слагаемым в выражении (2.46). Возникает это из-за влияния внутреннего трения, действующего на частицы среды, в которой распространяется акустическая волна. Коэффициент объемной вязкости η' характеризует потери, возникающие при всестороннем сжатии среды. В основе объемной вязкости лежит релаксационный (запаздывающий во времени) процесс, влияющий на поглощение волн в ограниченной полосе частот (многоатомные газы, органические жидкости). Вне области особого релаксационного поглощения при вычислении коэффициента затухания достаточно учитывать лишь основную сдвиговую вязкость. Учет влияния теплопроводности (перенос тепла из области сжатия в область разрежения акустической волны) записан в виде третьего слагаемого в выражении (2.46). Ввиду малости коэффициента теплопроводности x потери на теплопроводность незначительны, и ими

можно пренебречь. Формула для расчета коэффициента затухания на заданной частоте для продольных акустических волн принимает вид

$$\alpha = \frac{2 \omega^2 \eta}{3 \rho_0 V_l^3}. \quad (2.47)$$

Формула (2.47) справедлива и для сдвиговых волн в твердых телах с учетом подстановки скорости распространения этих волн V_t . Поглощение удобно характеризовать коэффициентом затухания, имеющим размерность децибел на метр (дБ/м):

$$\alpha \text{ (дБ/м)} = 20 \lg e \alpha \text{ (1/м)} = 8,686 \cdot \alpha \text{ (1/м)}.$$

В среде с потерями амплитуда колебательной скорости уменьшается с расстоянием по экспоненциальному закону. Для плоской гармонической волны, распространяющейся вдоль оси z ,

$$\dot{v} = v_m e^{-jkz} = v_m e^{-\alpha z} e^{-jkz}.$$

Плотность потока энергии акустической волны также уменьшается за счет перехода части ее в тепловую энергию

$$J = J_0 e^{-2\alpha z} = \frac{1}{2} v_m^2 e^{-2\alpha z} \rho_0 V_l.$$

Значение коэффициента сдвиговой вязкости η приведено в Прил.2. Коэффициент сдвиговой вязкости в воде $\eta = 10^{-3}$ Па·с, в воздухе $\eta = 1,9 \cdot 10^{-5}$ Па·с, и с учетом плотности среды и скорости волны поглощение акустической волны в воде существенно меньше, чем в воздухе (примерно в 1000 раз).

Поглощение акустической волны из-за потерь на внутреннее трение меняется пропорционально квадрату частоты и обратно пропорционально кубу скорости ее распространения. Поскольку сдвиговые волны обычно имеют скорость около половины скорости распространения продольных волн в том же материале, следует ожидать, что поглощение сдвиговых волн на единицу пути будет значительно больше, чем продольных.

При комнатной температуре коэффициент затухания в воде на частоте 1 МГц равен 0,22 дБ/м, т.е. акустические волны такой частоты могут распространяться на достаточно большие расстояния. На частоте 1 ГГц коэффициент затухания оценивается значением

$2,2 \cdot 10^5$ дБ/м. В этом случае распространение волны возможно на несколько миллиметров. В высококачественном монокристалле сапфира даже на частоте 10 ГГц затухание составляет около 40 дБ/см, несмотря на это данный материал используют для построения линий задержки. Длина волны при этом будет около 1 мкм. Затухание на расстоянии в одну длину волны будет равно $4 \cdot 10^{-3}$ дБ, что заметно ниже, чем в волноводах для электромагнитных волн. В вязких материалах, таких как резина, потери существенны уже на частотах в несколько килогерц. Следовательно, такие материалы являются хорошими звукопоглотителями.

Для сферических и цилиндрических волн потери связаны еще и с их геометрической расходимостью. Возьмем отношение акустических давлений на разных расстояниях r_1 и r_2 с учетом поглощения

$$\frac{Pa_2}{Pa_1} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n e^{-\alpha r},$$

где $n = 1/2$ – для цилиндрической волны;

$n = 1$ – для сферической волны;

Вычислим изменение уровня интенсивности, дБ:

$$L = 20 \lg \left(\frac{Pa_2}{Pa_1} \right) = \left(20 n \lg \left(\frac{r_1}{r_2} \right) - r \alpha \right).$$

В реальных средах существуют различного рода неоднородности. Неоднородностью называется область среды, параметры которой отличаются от параметров окружающего пространства. Наличие неоднородностей в среде приводит к дополнительному уменьшению интенсивности акустических волн в заданном направлении распространения за счет рассеяния энергии в разных направлениях.

Интенсивность рассеянного поля и его пространственное распределение существенно зависит от соотношения размеров неоднородностей и длины волны облучающего поля. Например, для простейшей модели рассеивателя в виде сферы радиуса много меньше длины волны (задача Рэлея) решение задачи рассеяния определяет интенсивность рассеянных волн в дальней зоне в следующем виде:

$$J_{\text{рас}} = J_{\text{пад}} \frac{\omega^4 a^6}{9 V_l^4 r^2} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \alpha \right)^2, \quad (2.48)$$

где a – радиус сферы; r – расстояние от центра сферы до точки наблюдения; α – угол между направлением в точку наблюдения и прямой, соединяющей удаленный источник облучения и сферу [1]. Следует обратить внимание на то, что интенсивность рассеяния пропорциональна четвертой степени частоты падающего поля. Выражение в круглых скобках в (2.48) определяет угловое распределение рассеянного поля.

В реальных средах рассеиватели имеют более сложный вид, и они обычно случайно распределены в пространстве. Как следствие, это приводит к более сложной картине рассеянного поля и росту потерь. В задачах рассеяния звука особое значение занимает обратная задача рассеяния – нахождение характеристик локализованных неоднородностей на основе анализа рассеянных полей. Это используется в прикладной акустике, в частности в дефектоскопии, компьютерной томографии и т.д.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. При какой температуре скорость звука в воздухе увеличится на треть по сравнению со скоростью при температуре 0°C ? При какой температуре станет на треть меньше? Скорость звука при $t = 0^{\circ}\text{C}$ равна 330 м/с.

2.2. Рассчитать “звуковой барьер” самолета (когда его скорость равна скорости звука) на высоте 9 км, где температура – 50°C , и сравнить его со звуковым барьером при 0°C на уровне моря. Зависит ли барьер от атмосферного давления?

2.3. Найти длину волны в воздухе на частоте 500 Гц, если давление воздуха $p_0 = 10^5$ Па, а его плотность $\rho_0 = 1,26$ кг/м³.

2.4. Смещение частиц среды, м, в плоской бегущей в воздухе звуковой волне описывается функцией $u = 5 \cdot 10^{-8} \sin(1980t - 6x)$. Найти: частоту колебаний, скорость распространения волны, длину волны, амплитуду колебательной скорости частицы среды, если акустическое сопротивление воздуха $Z_a = 420$ кг/(м²·с).

2.5. Плоская волна с амплитудой акустического давления $2 \cdot 10^{-5}$ Па при частоте колебаний 1000 Гц (порог слышимости на данной частоте)

те) распространяется в воздухе. Найти значение амплитуды скорости и смещения частиц.

2.6. Амплитуда колебательной скорости частиц среды (вода) под воздействием плоской гармонической звуковой волны равна $v_m = 5 \cdot 10^{-5}$ см/с. Вычислить амплитуду смещения и величину звукового давления на частоте 100 Гц. Как изменятся эти величины, если такую же колебательную скорость частицам среды создает волна, распространяющаяся в воздухе?

2.7. Амплитуда звукового давления в плоской гармонической волне равна $p_{am} = 2 \cdot 10^{-4}$ Па. Вычислить амплитуду колебательной скорости и смещения, средние значения интенсивности и плотности энергии волны в воздухе на частоте $f = 1$ кГц (считать, что акустическое сопротивление воздуха $Z_{a_{\text{воздуха}}} = \rho_0 C = 420$ кг/(м² · с)).

2.8. Интенсивность звука J на частоте $f = 10$ кГц равна 0,1 Вт/м². Вычислить объёмную плотность энергии, акустическое давление, смещение и скорость частиц в плоской волне, распространяющейся: а) в воде; б) в воздухе. Скорость звука в воде 1500 м/с, в воздухе 340 м/с.

2.9. Интенсивность звука равна $J = 2 \cdot 10^{-4}$ Вт/м². Найти уровень интенсивности относительно стандартного уровня $J_{ст} = 10^{-12}$ Вт/м².

2.10. Уровень интенсивности плоской звуковой волны в воздухе равен 100 дБ по отношению к стандартному нулевому уровню интенсивности. Вычислить амплитуду колебательной скорости v_m частиц, если акустическое сопротивление воздуха $Z_a = 420$ кг/(м² · с).

2.11. Вычислить расстояние, на котором амплитуда акустической волны в воде уменьшится в 10 раз, если частота колебаний равна 500 кГц.

2.12. Интенсивность звука в плоской волне вследствие поглощения уменьшается в воздухе в несколько раз на расстоянии l_1 . Определить расстояние l_2 , на котором во столько же раз уменьшится интенсивность звука данной частоты в воде?

2.13. Найти ослабление звука в децибелах на расстоянии 100 м в воде, если частота колебаний акустической волны равна 2 МГц. Считать, что скорость акустической волны в воде равна 1500 м/с.

2.14. Построить график зависимости коэффициента затухания акустической волны в воде и воздухе от частоты в пределах от 100 Гц

до 100 кГц. Для наглядности сравнения графики коэффициентов затухания лучше строить в логарифмическом масштабе.

Глава 3. Отражение и прохождение акустических волн на границе раздела сред

3.1. Коэффициенты отражения и прохождения при нормальном падении акустической волны на границу раздела сред

Если на пути распространения акустической волны встретилась граница со средой, имеющей другие параметры, во вторую среду просочится только часть мощности волны, остальная отразится от границы. При решении задач конструирования ультразвуковых излучателей актуальным является хорошее согласование их со средой, чтобы максимальная энергия уходила в требуемом направлении. В акустике часто возникает проблема эффективного поглощения звуковых волн. В этих и во многих других ситуациях важно уметь рассчитывать коэффициенты отражения и прохождения волн на границе раздела сред.

Пусть плоская акустическая волна, распространяясь вдоль оси z в среде с акустическим импедансом Z_1 , падает на границу со средой, имеющей импеданс Z_2 (рис.3.1).

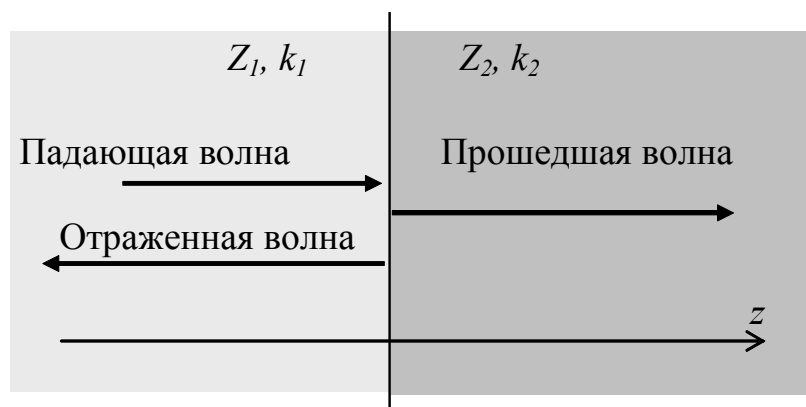


Рис. 3.1. Отражение акустической волны на границе

Запишем поле в первой среде в виде суммы падающей и отраженной волн давлений и колебательных скоростей для некоторой фиксированной частоты (гармонического колебания)

$$\dot{p}_{a1} = p_{a \text{ пад}} e^{-jk_1 z} + p_{a \text{ отр}} e^{+jk_1 z}, \quad (3.1)$$

$$\dot{v}_{z1} = v_{z \text{ пад}} e^{-jk_1 z} + v_{z \text{ отр}} e^{+jk_1 z}. \quad (3.2)$$

В формуле (3.1) $p_{a \text{ пад}}$, $p_{a \text{ отр}}$ – амплитуды акустических давлений падающей и отраженной волн в сечении $z = 0$. В формуле (3.2) $v_{z \text{ пад}}$, $v_{z \text{ отр}}$ – амплитуды колебательных скоростей частиц среды, движущихся под воздействием этих волн в сечении $z = 0$. Постоянная распространения k_1 определяет скорость распространения акустических волн в первой среде. Знак «минус» в показателе экспоненты соответствует волне, бегущей вдоль оси z , а знак «плюс» – волне, бегущей в противоположном направлении.

Справа от границы раздела сред существует только прошедшая волна, поле которой во второй среде можно записать в виде

$$\dot{p}_{a2} = p_{a \text{ пр}} e^{-jk_2 z}, \quad (3.3)$$

$$\dot{v}_{z2} = v_{z \text{ пр}} e^{-jk_2 z}. \quad (3.4)$$

В формулах (3.3), (3.4) $p_{a \text{ пр}}$ – амплитуда акустического давления прошедшей волны в сечении $z = 0$; $v_{z \text{ пр}}$ – амплитуда колебательной скорости частиц во второй среде в сечении $z = 0$; k_2 – постоянная распространения акустической волны во второй среде.

Отметим, что акустическое давление и колебательная скорость частиц среды связаны между собой через акустическое сопротивление среды

$$Z_a = \pm \frac{p_a}{v}. \quad (3.5)$$

Верхний знак в (3.5) выбирается для акустической волны, бегущей вдоль оси z (падающая волна в первой среде и прошедшая во второй среде), а нижний – для волны, бегущей в противоположную сторону (отраженная волна на рис.3.1).

Введем **коэффициент отражения** от границы раздела в сечении $z = 0$ как отношение амплитуд акустических давлений отраженной и падающей волн

$$R_p = \frac{p_{a \text{ отр}}}{p_{a \text{ пад}}}, \quad (3.6)$$

где нижний индекс p показывает, что коэффициент отражения вычисляется через амплитуды давлений.

Аналогично можно ввести **коэффициент прохождения** по акустическому давлению в виде

$$T_p = \frac{P_{a \text{ пр}}}{P_{a \text{ пад}}} . \quad (3.7)$$

Коэффициенты отражения и прохождения можно определить из (3.1), (3.3) с учетом граничных условий.

Граничные условия – условия непрерывности акустического давления и нормальных к границе составляющих колебательной скорости частиц среды в сечении $z = 0$. Если, например, был скачок давления, то это подразумевало бы наличие на границе дополнительного источника энергии волн, а если был скачок колебательной скорости, то был бы скачок смещения частиц, т.е. разрыв сплошного характера среды, т.е. был бы нарушен закон неразрывности среды.

Таким образом, на границе раздела сред (в сечении $z = 0$) нужно потребовать выполнения условий непрерывности

$$P_{a1} = P_{a2}, \quad v_{z1} = v_{z2} . \quad (3.8)$$

Из выражений (3.1), (3.2) для сечения $z = 0$ получим

$$P_{a \text{ пад}} + P_{a \text{ отр}} = P_{a \text{ пр}},$$

$$v_{z1 \text{ пад}} + v_{z1 \text{ отр}} = v_{z2 \text{ пр}}.$$

Последнее выражение с учетом (3.5) можем записать

$$\frac{P_{a \text{ пад}}}{Z_1} - \frac{P_{a \text{ отр}}}{Z_1} = \frac{P_{a \text{ пр}}}{Z_2}.$$

Разделив левую и правую части на амплитуду акустического давления $P_{a \text{ пад}}$ и используя понятие коэффициентов отражения и прохождения (3.6), (3.7), получим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + R_p = T_p \\ 1 - R_p = \frac{Z_1}{Z_2} T_p \end{cases}, \quad (3.9)$$

которая позволяет записать выражения для расчета этих коэффициентов

$$R_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad (3.10)$$

$$T_p = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = 1 + R_p.$$

В зависимости от соотношения акустических сопротивлений сред коэффициент прохождения может быть как меньше, так и больше единицы. Однако закон сохранения энергии при этом не нарушается. Коэффициент прохождения по мощности всегда меньше единицы для любых сред (см. формулу (3.13)).

Выразив в формулах (3.1), (3.3) акустическое давление через колебательную скорость и акустическое сопротивление среды (3.5), с учетом граничных условий (3.8) составляем систему уравнений, аналогичную (3.9), из которой можно вывести выражения для расчета коэффициентов отражения и прохождения по колебательной скорости

$$R_v = \frac{v_{отр}}{v_{пад}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1} = -R_p, \quad (3.11)$$

$$T_v = \frac{v_{пр}}{v_{пад}} = \frac{2Z_1}{Z_2 + Z_1} = 1 + R_v.$$

Полученные выше выражения (3.10), (3.11) совпадают с выражениями для коэффициентов отражения и прохождения электромагнитных волн при нормальном падении на границу раздела двух сред.

Перед границей раздела в первой среде бегущие навстречу падающая и отраженная волны образуют интерференционное поле

$$p_{a1} = p_{aпад} e^{-jk_1 z} + R_p p_{aпад} e^{jk_1 z},$$

$$v_1 = v_{пад} e^{-jk_1 z} + R_v v_{пад} e^{jk_1 z}.$$

В предельном случае, когда сопротивление $Z_2 \rightarrow \infty$, коэффициенты отражения равны: $R_p = 1$, $R_v = -1$. При этом фаза давления не меняется при отражении, а амплитуда давления на границе удваивается, фаза колебательной скорости меняется на π , а амплитуда колебательной скорости на границе равна нулю. Перед границей возника-

ет интерференционное поле в виде стоячих волн полей акустического давления p_a и колебательной скорости v .

$$\dot{p}_{a1} = 2 p_{a \text{ пад}} \cos (k_1 z) e^{j \omega t}, \quad (3.12)$$

$$\dot{v}_1 = -j 2 v_{\text{пад}} \sin (k_1 z) e^{j \omega t}.$$

Если акустические сопротивления сред сильно отличаются друг от друга: $Z_2 \gg Z_1$ или $Z_1 \gg Z_2$, в первой среде возникает режим, близкий к режиму стоячих волн. В других случаях интерференционное поле определяется коэффициентом отражения, зависящим от сопротивления сред. Записав модуль интерференционного поля, можно показать, что максимальная амплитуда суммарного поля равна

$$p_{a \text{ max}} = p_{a \text{ пад}} \left[1 + |R_p|^2 \right],$$

а минимальная амплитуда

$$p_{a \text{ min}} = p_{a \text{ пад}} \left[1 - |R_p|^2 \right].$$

Рассмотрим, например, падение акустической волны частотой 10 кГц из ацетона на границу с водой. В соответствии с Прил.2 акустические сопротивления этих сред имеют следующие значения:

$$Z_1 = Z_{\text{ацетона}} = 0,79 \cdot 10^6 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}), \quad Z_2 = Z_{\text{воды}} = 1,46 \cdot 10^6 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Коэффициент отражения по акустическому давлению

$$R_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = 0,3.$$

Постоянная распространения в первой среде (ацетон) $k_1 = 63,3 \text{ м}^{-1}$, во второй среде (вода) $k_2 = 43,1 \text{ м}^{-1}$. На рис.3.2 показана нормированная зависимость суммарного акустического давления падающей и отраженной волн, распространяющихся в среде ацетона, с учетом наличия границы со второй средой – водой. Интересно, что на расстоянии одной длины волны (для ацетона на частоте 10 кГц это 0,1 м) наблюдается два максимума.

Если акустическое сопротивление второй среды $Z_2 \gg Z_1$, то коэффициент отражения в этом случае равен 1, падающая волна полностью отражается и график распределения суммарного акустического

давления изменяется (рис.3.3). В точках синфазного суммирования полей амплитуда удваивается, в точках пространства с противофазным суммированием амплитуда равна нулю. Возникает стоячая волна.

Если отраженной волны нет (согласованная граница), амплитуда поля акустической волны в первой среде без учета потерь во всех точках вдоль оси z будет постоянной. Аналогичные зависимости можно построить для колебательной скорости суммарного акустического поля.

$$|p_{a\Sigma}(z)|$$

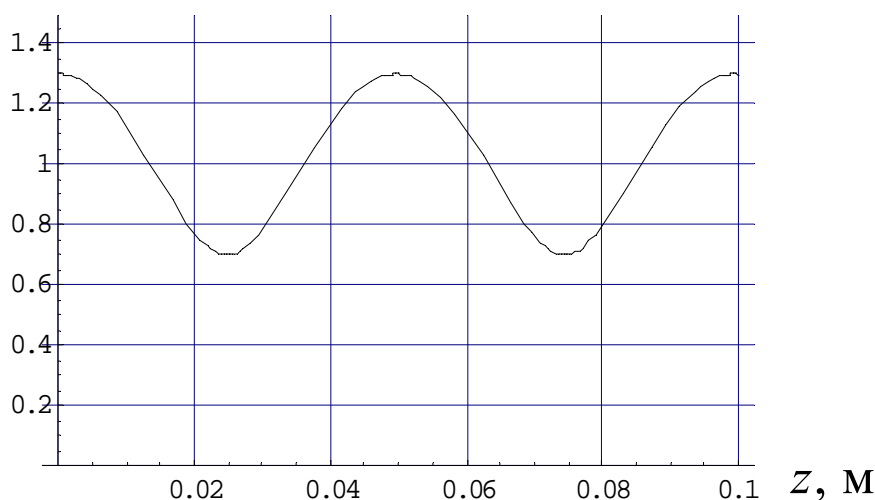


Рис.3.2. Зависимость модуля акустического давления суммарного поля падающей и отраженной волн вблизи границы раздела ацетон–вода

$$|p_{a\Sigma}(z)|$$

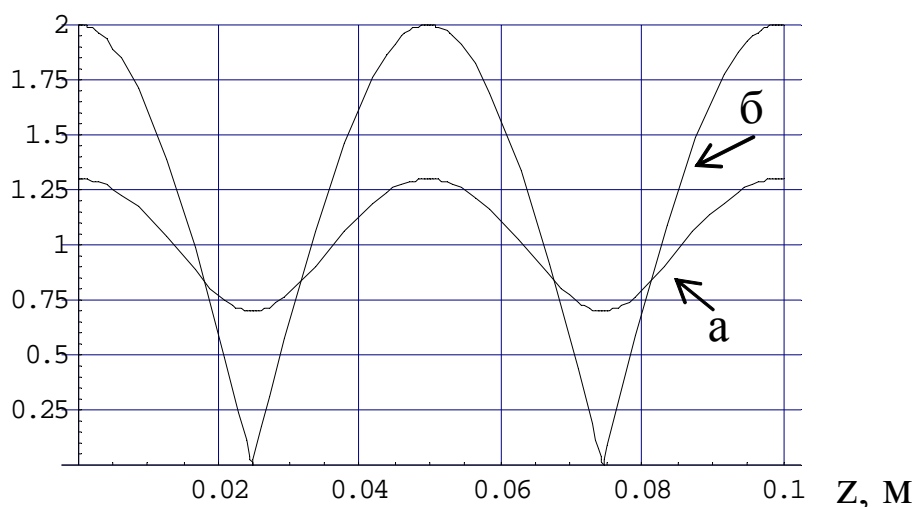


Рис.3.3. Зависимость модуля акустического давления суммарного поля падающей и отраженной волн вблизи границы разделов:

ацетон – вода (а) и ацетон – идеальный отражатель (б)

Коэффициент прохождения по интенсивности определим как отношение интенсивности прошедшей через границу плоской волны к интенсивности падающей. При нормальном падении

$$T_J = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{p_{a\text{пр}2}^2}{p_{a\text{пад}1}^2} = \frac{Z_1}{Z_2} T_P^2 = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 1 - |R_P|^2 \quad (3.13)$$

Взаимными заменами входящих в (3.13) величин сопротивлений Z_1 и Z_2 несложно показать, что коэффициенты прохождения энергии из среды 1 в среду 2 и обратно одинаковы. Параметр T_J показывает, какая доля мощности падающей волны просачивается во вторую среду. Для улучшения передачи мощности акустической волны через границу среды должны быть согласованы, т.е. их волновые сопротивления должны быть одинаковы. Однако на практике это условие выполняется крайне редко. Обычно рассогласование сред для акустических волн получается во много раз большим, чем для электромагнитных волн. Например, такой широко используемый в акустоэлектронике твердый материал, как сапфир, имеет акустическое сопротивление для продольных волн $Z_a = 44,3 \cdot 10^6$ кг/(м²·с), у воды значение акустического сопротивления $Z_a = 1,5 \cdot 10^6$ кг/(м²·с), а для воздуха гораздо меньше – $Z_a = 4,27 \cdot 10^2$ кг/(м²·с), и при решении большинства задач его вообще можно считать нулевым.

Рассмотренные законы отражения и прохождения продольных волн при нормальном падении на границу раздела упругих сред (жидких, газообразных или твердых) справедливы и для сдвиговых волн в твердых средах.

3.2. Акустическое согласование сред

Решить задачу согласования сред для акустических волн и минимизировать их отражение от границы раздела сред можно введением четвертьволнового трансформирующего слоя. Этот метод широко используется в оптике и технике СВЧ. Он основан на использовании модели эквивалентной линии передачи для анализа распространения акустических волн. Вторая среда выполняет роль некоторого сопро-

тивления нагрузки, подключенного к линии передачи в сечении $z = 0$ (рис.3.4). До этого сечения ($z < 0$) эквивалентная линия моделирует распространение падающей и отраженной акустических волн в первой среде. Рассчитаем входное сопротивление отрезка эквивалентной линии длиной l , соответствующей толщине выделенного слоя первой среды.

Сопротивление нагрузки эквивалентной линии равно акустическому сопротивлению второй среды $Z_H = Z_2$

Запишем акустическое давление и колебательную скорость падающей и отраженной волн в сечении $z = -l$:

$$\dot{p}_a(-l) = p_{\text{пад}} e^{j k_1 l} + p_{\text{отр}} e^{-j k_1 l},$$

$$\dot{v}(-l) = v_{\text{пад}} e^{j k_1 l} + v_{\text{отр}} e^{-j k_1 l},$$

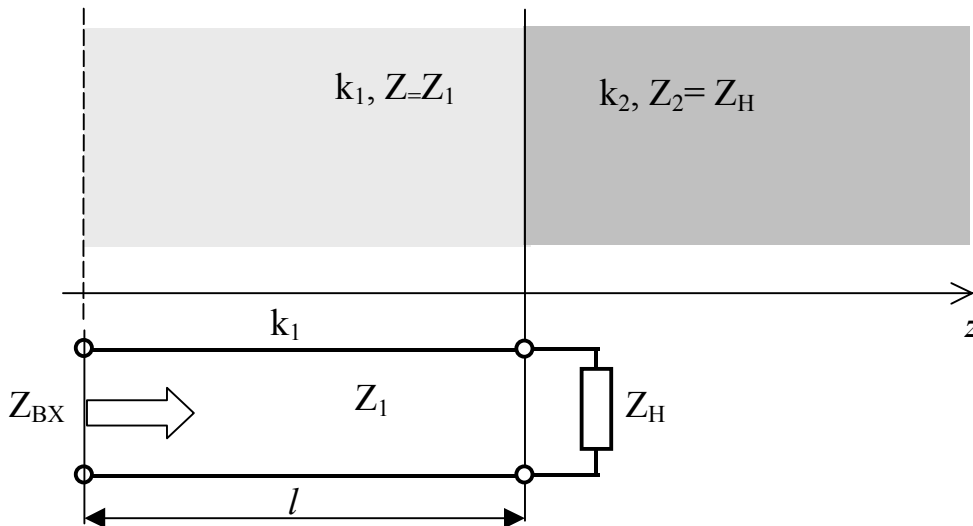


Рис. 3.4. Эквивалентная схема границы раздела сред

Перейдем от колебательной скорости к давлению через сопротивление и воспользуемся коэффициентом отражения по давлению

$$\dot{p}_a(-l) = p_{\text{пад}} \left(e^{j k_1 l} + R_p e^{-j k_1 l} \right),$$

$$\dot{v}(-l) = \frac{p_{\text{пад}}}{Z_1} \left(e^{j k_1 l} - R_p e^{-j k_1 l} \right).$$

Входное сопротивление эквивалентной линии с постоянной распространения k_1 на расстоянии l от границы по аналогии с теорией линий передачи может быть определено из формулы

$$Z_{\text{вх}}(z = -l) = \frac{\dot{p}_a(-l)}{\dot{v}(-l)} = Z_1 \frac{e^{j k_1 l} + R_p e^{-j k_1 l}}{e^{j k_1 l} - R_p e^{-j k_1 l}}.$$

Подставляем выражение коэффициента отражения из (3.10) и получаем

$$Z_{\text{вх}}(-l) = Z_1 \frac{Z_2 \cos(k_1 l) + j Z_1 \sin(k_1 l)}{Z_1 \cos(k_1 l) + j Z_2 \sin(k_1 l)} \quad (3.14)$$

Отойдем от границы на четверть длины волны $l = \lambda/4$, где λ – длина волны в линии передачи, и определим произведение $k_1 l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$. Выражение (3.14) преобразуется к виду

$$Z_{\text{вх}}\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{Z_1^2}{Z_2}. \quad (3.15)$$

Подбирая значение волнового сопротивления четвертьволнового слоя среды, можно решить задачу согласования двух сред. Между двумя средами нужно расположить дополнительный четвертьволновый слой материала с таким акустическим сопротивлением, чтобы обеспечить равенство акустического сопротивления первой среды и входного сопротивления эквивалентной линии передачи. В этом случае отраженные от обеих границ дополнительного согласующего слоя волны будут противофазны и равны по амплитуде, что приведет к их взаимной компенсации (рис.3.5). Сдвиг фазы 180 градусов обеспечивается разностью хода волн между границами в полдлины волны, а равенство амплитуд – рациональным выбором акустического сопротивления трансформирующего слоя.

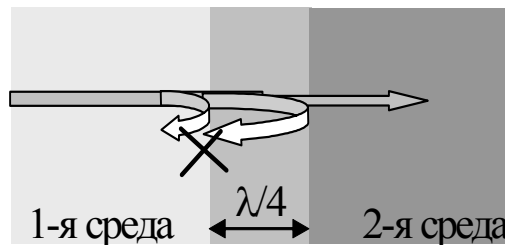


Рис. 3.5. Согласование двух сред с помощью четвертьволнового слоя

Запишем входное сопротивление (3.15) с учетом того, что согласующий слой имеет свои собственные параметры: сопротивление $Z_{\text{тр}}$, волновое число $k_{\text{тр}}$ и толщину $l_{\text{тр}}$. При $l_{\text{тр}} = \frac{\lambda_{\text{тр}}}{4}$ входное сопротивление на границе $z = -l_{\text{тр}}$ будет равно

$$Z_{\text{вх}} \left(\frac{\lambda_{\text{тр}}}{4} \right) = Z_{\text{тр}}^2 / Z_2. \quad (3.16)$$

Для того чтобы отраженные волны от сечения $z = -l_{\text{тр}}$ отсутствовали, входное сопротивление эквивалентной линии передачи (3.16) должно равняться акустическому сопротивлению первой среды.

$$Z_1 = \frac{Z_{\text{тр}}^2}{Z_2}.$$

Отсюда получаем выражение для расчета акустического сопротивления согласующего (трансформирующего) четвертьволнового слоя

$$Z_{\text{тр}} = \sqrt{Z_1 Z_2}. \quad (3.17)$$

По сопротивлению (3.17) подбирается материал для изготовления согласующего слоя. Толщина согласующего слоя равна четверти длины волны в используемом материале, поэтому полоса частот низкого значения коэффициента отражения получается достаточно малой. Для расширения диапазона частот хорошего согласования применяется многослойная трансформирующая структура, состоящая из нескольких четвертьволновых слоев. В оптике аналогично выполняются "просветленные" стекла.

3.3. Наклонное падение продольной акустической волны на границу раздела жидких и газообразных сред

Особенности отражения и прохождения акустической волны при наклонном падении на границу раздела упругих сред зависят от свойств сред и типа падающей волны. Задача существенно усложняется на границе с твердой средой, когда падающая продольная или сдвиговая волна расщепляется на две волны. Это расщепление на-

блюдается как для отраженной, так и для прошедшей волн, если они распространяются в твердой среде. В случае наклонного падения электромагнитной волны на границу раздела сред подобного эффекта расщепления лучей не наблюдается. Особенности поведения акустических волн на границе с твердым телом будут рассмотрены ниже.

Анализ наклонного падения акустических волн на границу жидких и газообразных сред упрощается в связи с тем, что в этих средах распространяются лишь продольные волны. Эффект расщепления лучей не наблюдается. Полученные результаты аналогичны законам поведения электромагнитных волн на границе раздела сред.

Пусть на границу раздела двух сред, в которых могут распространяться только продольные волны, под углом θ падает плоская акустическая волна (рис.3.6). Под пока неизвестными углами θ' и ψ она отражается от границы и проходит во вторую среду.

Воспользуемся выражением для продольной волны, распространяющейся в произвольном направлении (2.24), (2.25), и запишем комплексные амплитуды акустических давлений падающей, отраженной и преломленной волн:

$$\dot{p}_{a\text{пад}} = p_{a\text{пад}} e^{-jk_1(x\sin\theta+z\cos\theta)}, \quad (3.18)$$

$$\dot{p}_{a\text{отр}} = p_{a\text{отр}} e^{-jk_1(x\sin\theta'-z\cos\theta')}, \quad (3.19)$$

$$\dot{p}_{a\text{пр}} = p_{a\text{пр}} e^{-jk_2(x\sin\psi+z\cos\psi)}. \quad (3.20)$$

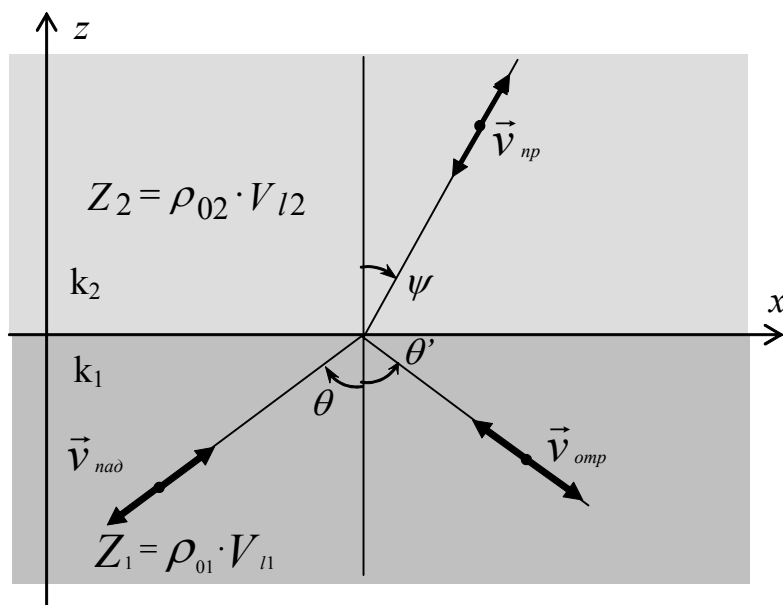


Рис. 3.6. Ход отраженных и прошедших лучей при падении продольной акустической волны на границу раздела

жидких или газообразных сред

Согласно граничным условиям в любой точке границы раздела

$$\dot{p}_{a1} = \dot{p}_{a2} \text{ при } z = 0. \quad (3.21)$$

С учетом выражений (3.18)-(3.20) граничное условие (3.21) принимает вид

$$p_{a\text{пад}} e^{-jk_1 x \sin \theta} + p_{a\text{отр}} e^{-jk_1 x \sin \theta'} = p_{a\text{пр}} e^{-jk_2 x \sin \psi}. \quad (3.22)$$

Тождество (3.22) должно выполняться для любых значений координаты z . Это возможно лишь в случае, когда все экспоненты равны друг другу. Следовательно, и показатели экспонент должны быть равны между собой:

$$k_1 \sin \theta = k_1 \sin \theta' = k_2 \sin \psi. \quad (3.23)$$

Из (3.23) получаем известные законы Снеллиуса:

- **закон отражения** – угол падения равен углу отражения

$$\theta = \theta', \quad (3.24)$$

- **закон преломления**

$$\sin \psi = \frac{k_1}{k_2} \sin \theta = \frac{V_{l2}}{V_{l1}} \sin \theta. \quad (3.24)$$

С учетом равенства экспонент в (3.22) условие непрерывности акустических давлений на границе раздела сред можно записать в виде

$$p_{a\text{пад}} + p_{a\text{отр}} = p_{a\text{пр}}. \quad (3.25)$$

Для вывода расчетных формул коэффициента отражения и коэффициента прохождения воспользуемся вторым граничным условием для сечения $z = 0$ - непрерывностью нормальных к границе компонентов колебательной скорости

$$v_{n1} = v_{n2}. \quad (3.26)$$

У продольной волны вектор колебательной скорости совпадает с направлением распространения и нормальная к границе раздела составляющая представляет собой проекцию вектора колебательной скорости на ось z . Условие (3.26) с учетом равенства экспонент, вид которых аналогичен (3.22), примет вид

$$v_{\text{пад}} \cos \theta - v_{\text{отр}} \cos \theta = v_{\text{пр}} \cos \psi \quad (3.27)$$

Знак «минус» в (3.27) обусловлен разным направлением распространения падающей и отраженной волн относительно оси z (см. рис. 3.4).

Коэффициенты отражения и прохождения по акустическому давлению вводятся так же как и в случае нормального падения:

$$R_p = \frac{P_{a \text{ отр}}}{P_{a \text{ пад}}}, \quad (3.28)$$

$$T_p = \frac{P_{a \text{ пр}}}{P_{a \text{ пад}}}. \quad (3.29)$$

Для того чтобы получить нужные расчетные формулы, в выражении (3.27) переходим от колебательной скорости к акустическому давлению с использованием связывающего их акустического сопротивления. После этого из (3.25) и (3.27) получается система из двух уравнений:

$$\begin{cases} 1 + R_p = T_p \\ 1 - R_p = T_p \frac{\cos \psi}{\cos \theta} \frac{Z_1}{Z_2} \end{cases} \quad (3.30)$$

из которой определяются коэффициент прохождения для случая наклонного падения

$$T_p = \frac{2 Z_2 \cos \theta}{Z_1 \cos \psi + Z_2 \cos \theta} \quad (3.31)$$

и коэффициент отражения

$$R_p = \frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \psi}{Z_1 \cos \psi + Z_2 \cos \theta}. \quad (3.32)$$

Формулы (3.31) и (3.32) называются акустическими формулами Френеля.

При условии $Z_1 \cos \psi = Z_2 \cos \theta$ коэффициент отражения по давлению равен нулю, волна полностью проходит во вторую среду. Угол падения при полной прозрачности определяется из условия

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{m^2 - 1}}, \quad (3.33)$$

где $n = \frac{V_{l1}}{V_{l2}}$, $m = \frac{\rho_2}{\rho_1}$.

Из закона преломления (3.24) следует, что при $\frac{V_{l2}}{V_{l1}} > 1$ угол преломления ψ будет больше угла падения θ . Приняв $\psi = \frac{\pi}{2}$, из (3.24) определяем критический угол падения, при котором преломленная волна пойдет вдоль границы раздела

$$\theta_{кр} = \arcsin \frac{V_{l1}}{V_{l2}}. \quad (3.34)$$

При $\theta = \theta_{кр}$ угол преломления $\psi = \frac{\pi}{2}$ коэффициент отражения $R_p = 1$ и наблюдается **явление полного отражения**. При углах падения $\theta > \theta_{кр}$ имеем $\sin \psi > 1$, и тогда $\cos \psi = -j \sqrt{\sin^2 \psi - 1}$ становится мнимой величиной. Для записи коэффициента отражения введем обозначения

$$k_1 \cos \theta = a, \quad k_2 \cos \psi = -j \alpha. \quad (3.35)$$

По формуле Френеля (3.32)

$$\begin{aligned} R_p &= \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{k_2 \cos \psi}{k_1 \cos \theta} \right] \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{k_2 \cos \psi}{k_1 \cos \theta} \right]^{-1} = \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} + j \frac{\alpha}{a} \right] \left[\frac{\rho_2}{\rho_1} - j \frac{\alpha}{a} \right]^{-1} = \\ &= -1 e^{-j \sigma}, \end{aligned}$$

где $\operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} = \left(\frac{\alpha}{a} \right) / \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$.

Коэффициент отражения по модулю равен единице, и при углах падения $\theta > \theta_{кр}$ сохраняется полное отражение.

3.4. Задачи для самостоятельного решения

3.1. Найти коэффициент отражения по давлению и коэффициент передачи энергии при нормальном падении звука из воздуха в воду и из воды в воздух.

3.2. Плоская звуковая волна падает по нормали из воздуха на полупространство из углекислоты. Определить коэффициент отражения R на границе. Во сколько раз отличается амплитуда прошедшей волны от амплитуды падающей? Определить отношение амплитуд звукового давления в максимумах и минимумах акустического поля в воздухе. Считать, что для воздуха скорость распространения волны равна 340 м/с, его акустическое сопротивление $Z_{a \text{ воздуха}} = 420$ кг/(м²·с), для углекислоты скорость распространения волны равна 260 м/с, ее акустическое сопротивление $Z_{a \text{ углекислоты}} = 510$ кг/(м²·с).

3.3. Рассчитать акустическое сопротивление «просветляющего» слоя, обеспечивающего наилучшую передачу звука из воды в воздух.

3.4. Построить график зависимости коэффициента отражения и коэффициента прохождения по акустическому давлению от угла падения, если акустическая волна падает из воды на границу с ртутью.

3.5. Получить из формул Френеля предельное значение коэффициента отражения по давлению при скользющем падении ($\theta_1 \rightarrow \pi/2$).

3.6. Определить диапазон углов падения продольной волны на границу вода – анилин, при котором границу можно рассматривать полным отражателем. Считать, что скорость распространения акустических волн в воде 1480 м/с, в анилине – 1659 м/с.

Глава 4. Акустические волны в твердых телах

4.1. Основные величины и уравнения акустического поля

Особенности и характер распространения акустических волн в твердых телах определяются упругими свойствами твердых тел. В отличие от ранее рассмотренных жидких и газообразных сред твердые тела обладают упругостью не только объема, но и формы. Картина акустического поля заметно усложняется. Акустические волны в твердых телах представляют собой комбинацию продольной L и поперечной T объемных волн.

На первом этапе считаем твердое тело изотропным, его физические свойства в любом элементе объема одинаковы и тело не имеет неоднородностей или каких – либо включений. Кроме того, считаем, что электрические и магнитные поля в рассматриваемом теле отсутствуют. Известно, что под действием механических сил твердые тела изменяют свои размеры и форму (т.е. деформируются). Возможны различные деформации твердых тел – сжатие и растяжение, сдвиг, изгиб и кручение. Однако в теории упругости доказывается, что все виды деформации могут быть сведены лишь к двум – к растяжению (сжатию) и сдвигу. Продольная деформация (растяжение или сжатие) вызывает продольные волны, поперечная (или сдвиговая) деформация порождает поперечные (или сдвиговые) волны. Между силами, приложенными к твердому телу, и возникшими в нем деформациями существует количественная связь, определяемая законом упругости Гука. Рассмотрим это на простом примере круглого металлического стержня длиной l и диаметром d . Пусть к стержню приложена продольная сила F . Для задания силы, воздействующей на единицу площади поверхности твердого тела, вводится понятие **напряжения**

$$T, \left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right],$$

$$T = \frac{F}{\Delta S}, \quad (4.1)$$

Под действием переменной силы растяжения или сжатия изменяется длина стержня на величину Δl . Относительное изменение дли-

ны металлического стержня можно рассматривать как величину его **деформации**

$$S = \frac{\Delta l}{l}.$$

При относительно небольших напряжениях величина деформации прямо пропорциональна приложенному напряжению

$$T = E S, \quad (4.2)$$

где коэффициент пропорциональности $E, \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ – **модуль продольной упругости (модуль Юнга)**.

При растяжении (сжатии) стержня диаметр его изменяется на величину Δd . Возникает поперечная деформация. Отношение относительного изменения поперечного сечения стержня $\Delta d/d$ к относительному изменению длины $\Delta l/l$ есть величина постоянная и называется **коэффициентом Пуассона**:

$$\sigma = \frac{\Delta d/d}{\Delta l/l} = \frac{\Delta d}{d} \frac{E}{T}.$$

Величина σ принимает значения от 0,05 до 0,5. Для металлов σ примерно составляет 0,25 – 0,35, для материалов типа резины $\sigma \approx 0,5$. Модуль продольной упругости E и коэффициент Пуассона σ описывают упругие свойства изотропного материала и являются скалярными величинами. Однако чаще для анализа поперечной деформации пользуются модулем сдвига, $\left[\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]$,

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{1 + \sigma}.$$

Значения E , σ и μ для некоторых материалов приведены в Прил.2.

В общем случае деформация твердого тела происходит и описывается достаточно сложно, так что воспользуемся лишь кратким изложением. Напряжение T может действовать внутри тела не только по нормали к поверхности, как это имеет место в газе или жидкости, но и иметь составляющие по касательной к поверхности (рис. 4.1). В

декартовых координатах x, y, z напряжения в общем случае имеют 9 компонент и образуют тензор напряжений \vec{T} :

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix}.$$

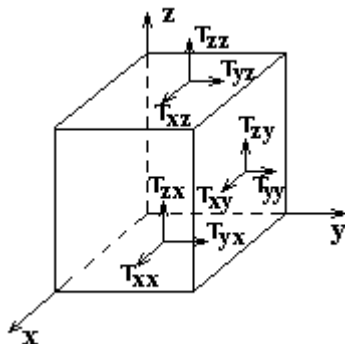


Рис.4.1. Возможная ориентация напряжений, приложенных к граням выделенного объема твердой среды

Первый индекс у элементов тензора напряжений T_{ij} означает направление приложенного напряжения, второй – плоскость, перпендикулярную той, на которую оно действует.

Напряжение, приложенное в каком-либо одном направлении (например, вдоль оси z), вызывает деформацию не только в данном направлении, но и в других направлениях. В общем случае это приводит к тому, что и деформация также описывается тензором. Диагональные коэффициенты T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} связаны с продольной деформацией, а остальные элементы тензора со сдвиговой деформацией. Для жидких и газообразных сред, которые не испытывают упругой реакции на деформацию сдвига, напряжение является скалярной величиной и совпадает с акустическим давлением, т.е. $T_{ii} = p_a$. Если продольная волна распространяется, например, вдоль оси x , то акустическое давление p_a совпадает с напряжением T_{xx} , а остальные компоненты будут равны 0.

При деформации твердого тела изменяется расстояние между его точками, эти изменения, как правило, являются малыми. Изменение расстояния между двумя близкими точками служит характеристикой деформированного состояния. Введем вектор смещения, определяющий взаимное положение двух соседних точек M и M' :

$$\vec{u}_M = \vec{r}_{M'} - \vec{r}_M,$$

где $\vec{r}_{M'}$, \vec{r}_M – радиусы-векторы, проведенные из начала координат, выбранного внутри тела. Компоненты вектора смещения образуют тензор деформации \vec{S} , элементы которого вычисляются по формуле

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k}{\partial q_l} + \frac{\partial u_l}{\partial q_k} \right], \quad q_l, q_k = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases} \quad (4.3)$$

Производные в квадратных скобках представляют собой относительные деформации в разных направлениях. Например, при $k = l$ компоненты тензора деформации $S_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$, $S_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$ и $S_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ представляют собой относительные удлинения по осям x, y, z и связаны с продольной деформацией. При $k \neq l$ компоненты S_{kl} определяют сдвиговые деформации. Например, производная $\frac{\partial u_x}{\partial y}$ – это сдвиговая деформация в направлении оси x по отношению к расстоянию ∂y . Тензор напряжений \vec{T} , так же как и тензор деформаций \vec{S} , являются симметричными, т.е. для них выполняется условие $T_{ij} = T_{ji}$ и $S_{kl} = S_{lk}$.

Для изотропного твердого тела связь между тензором напряжений и тензором деформаций дается законом упругости Гука [3]:

$$T_{ij} = \lambda S_{kk} \delta_{ij} + 2\mu S_{ij}, \quad (4.4)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $\begin{cases} \delta = 1, & i = j \\ \delta = 0, & i \neq j \end{cases}$,

λ, μ – модули упругости (постоянные Ламе), н/м².

В общем случае в теории упругости пользуются пятью модулями упругости: $E, \mu, \lambda, \sigma, K$. Последний параметр K – модуль объемной упругости был введен ранее (разд. 2.3). Между всеми этими постоянными (модулями) упругости имеется связь (только две из этих постоянных являются независимыми):

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{1 + \sigma}, \quad \lambda = \frac{E \sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad K = \lambda + 2\mu.$$

Значения постоянных упругости можно найти в справочной литературе.

Изменение напряжений в пространстве вызывает ускорение элемента объема (частицы) твердого тела. Уравнение движения представляет собой второй закон Ньютона для элемента упругой деформированной среды:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = F_i \quad (4.5)$$

В левой части уравнения стоит произведение ускорения на массу единицы объема, в правой – объемная сила.

Уравнение закона Гука (4.4) и уравнение движения (4.5) упругой среды являются исходными уравнения для получения волнового уравнения.

4.2. Волновое уравнение Даламбера.

Скорость продольных и сдвиговых волн

Задача распространения упругих волн в безграничном твердом теле решается так же, как в газах и жидкостях, на основе волнового уравнения с использованием соответствующих граничных условий. Волновые уравнения для твердых тел выводятся исходя из закона Гука (4.4) и уравнения движения (4.5). Подставляя напряжение (4.4) с учетом (4.3) в уравнения движения (4.5), получим уравнение движения в векторном представлении (уравнение Ламе):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot rot } \vec{u} \quad (4.6)$$

Поскольку в твердом теле есть сдвиговые деформации, в волновом уравнении для вектора смещения \vec{u} присутствует и вихревая часть смещения, а само поле упругих волн в общем случае представляет собой векторное поле. Исходя из того, что любое векторное поле можно представить в виде суммы потенциальной и вихревой частей, и такое представление единственное, запишем вектор смещения \vec{u} в виде суммы потенциального \vec{u}_l и вихревого \vec{u}_t полей:

$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t. \quad (4.7)$$

При этом выполняются условия $\text{rot } \vec{u}_l = 0$ и $\text{div } \vec{u}_t = 0$, так что корректно записать $\vec{u}_l = \text{grad } \varphi$, и это будет потенциальная часть, а также $\vec{u}_t = \text{rot } \vec{a}$, и это будет вихревая часть смещения, φ и \vec{a} – скалярный и векторный потенциалы. Используя представление (4.7), из уравнения движения частиц (4.6) получаем два волновых уравнения Даламбера

$$\nabla^2 \vec{u}_l - \frac{\rho_0}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \vec{u}_l}{\partial t^2} = 0, \quad (4.8)$$

$$\nabla^2 \vec{u}_t - \frac{\rho_0}{\mu} \frac{\partial^2 \vec{u}_t}{\partial t^2} = 0. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.8) описывает распространение продольных волн. Для краткости назовем их L -волнами. Их фазовая скорость по аналогии с (2.7) может быть определена следующим образом:

$$V_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{E(1 - \sigma)}{\rho_0(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}}. \quad (4.10)$$

Если продольная акустическая волна распространяется в металлическом стержне, то формула для расчета ее скорости несколько упрощается:

$$V_l = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}. \quad (4.11)$$

Уравнение (4.9) описывает распространение сдвиговых (поперечных) упругих волн. Для краткости назовем их T -волнами. Скорость распространения T -волны

$$V_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad (4.12)$$

где μ – модуль сдвига (численные значения модуля сдвига для некоторых твердых сред приведены в Прил.2).

Скорости V_l и V_t связаны с упругими параметрами и плотностью твердого тела и не зависят от частоты. Следует заметить, что $V_l > V_t$. В большинстве металлов скорость распространения сдвиговых волн примерно в два раза меньше скорости продольных волн. Например, в

алюминии скорость распространения продольной волны составляет 6,42 км/с, а сдвиговой – 3,04 км/с.

Для гармонических волн уравнения (4.8), (4.9) преобразуются в уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{u}_l + k_l^2 \vec{u}_l = 0, \quad (4.13)$$

$$\nabla^2 \vec{u}_t + k_t^2 \vec{u}_t = 0, \quad (4.14)$$

где $k_{l,t} = \frac{\omega}{V_{l,t}}$ – волновые числа для продольных и поперечных

волн. Для плоской волны, распространяющейся, например, в направлении оси z , векторные уравнения (4.13), (4.14) сводятся к трем скалярным дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{u}_z}{\partial z^2} + k_l^2 \dot{u}_z &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{u}_x}{\partial z^2} + k_t^2 \dot{u}_x &= 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{u}_y}{\partial z^2} + k_t^2 \dot{u}_y &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Первое уравнение описывает распространение продольной L -волны. У нее смещение совпадает с направлением распространения плоской акустической волны. В поперечной волне, описываемой двумя другими уравнениями, компоненты вектора смещения \dot{u}_x и \dot{u}_y направлены перпендикулярно оси z , вдоль которой плоская волна распространяется в твердом теле. Решение уравнений (4.15) определяет поле плоской акустической волны в твердой изотропной среде

$$\vec{u}(z) = \vec{x}_0 u_{mx} e^{-jk_l z} + \vec{y}_0 u_{my} e^{-jk_l z} + \vec{z}_0 u_{mz} e^{-jk_l z}.$$

Первые две составляющие вектора смещения определяют сдвиговую волну, z -я составляющая определяет продольную волну. Если в твердом теле распространяется только L - или только T -волны, то многие соотношения, полученные ранее для жидких и газообразных сред, например акустическое сопротивление, коэффициент затухания, остаются справедливыми.

4.3. Отражение и прохождение акустических волн на границе раздела твердых сред

Законы отражения и преломления продольных и сдвиговых волн на границе твердых тел значительно сложнее, чем такие законы для продольных волн на границе жидких и газообразных сред. На поверхности раздела твердых сред выполняются граничные условия – условия непрерывности нормальных к границе раздела компонент элементов тензора напряжений. Это значительно усложняет задачу определения коэффициентов преломления и отражения акустических волн. Если плоская волна падает по нормали к плоской границе твердого тела, то законы отражения и преломления как L -волны, так и T -волны остаются теми же, что и для продольных волн на границе жидких и газообразных сред. При этом следует учитывать лишь различную скорость распространения продольных и сдвиговых волн. Если же волна падает под углом к границе раздела, то отражение и преломление существенно меняются по сравнению с продольными волнами в жидкостях и газах. Введем **понятие поляризации** для сдвиговых T -волн. Будем считать, что волна T поляризована вертикально, если вектор смещения в этой волне лежит в плоскости падения (рис.4.2). Напоминаем, что плоскость падения задается вектором направления распространения волны и нормалью к границе раздела сред. Если колебания частиц среды происходят в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, то волна считается поляризованной горизонтально. Рассмотрим три характерных случая наклонного падения волн на границу твердого тела.

1. На границу раздела твердых тел под углом $\theta_{l\text{пад}}$ падает продольная акустическая волна (L -волна).

Поскольку напряжение упругой волны приложено к частицам среды, лежащим на границе под углом $\theta_{l\text{пад}}$, то имеются соответствующие проекции данной силы на осях x и z . Это приводит к изменению направления движения частиц на поверхности твердого тела. В связи с этим отраженная и прошедшая волны в общем случае будут состоять уже из двух видов волн – продольной и сдвиговой вертикальной поляризации. Происходит **расщепление** (трансформация)

падающей $L_{\text{пад}}$ -волны. Расщепление связано с изменением характера, направления и параметров движения частиц на поверхности твердого тела под действием падающей волны. Скорости распространения продольных и сдвиговых волн различны (сдвиговые волны медленнее продольных), поэтому направления распространения сдвиговых волн отстоят от нормали к границе раздела на меньший угол, чем направления продольных волн. На рис.4.2 отраженные продольная и поперечная волны обозначены соответственно $L_{\text{отр}}$ и $T_{\text{отр}}$, прошедшие – $L_{\text{пр}}$ и $T_{\text{пр}}$. Направление колебания частиц среды условно показаны стрелками. Сдвиговые волны $T_{\text{отр}}$ и $T_{\text{пр}}$ поляризованы вертикально.

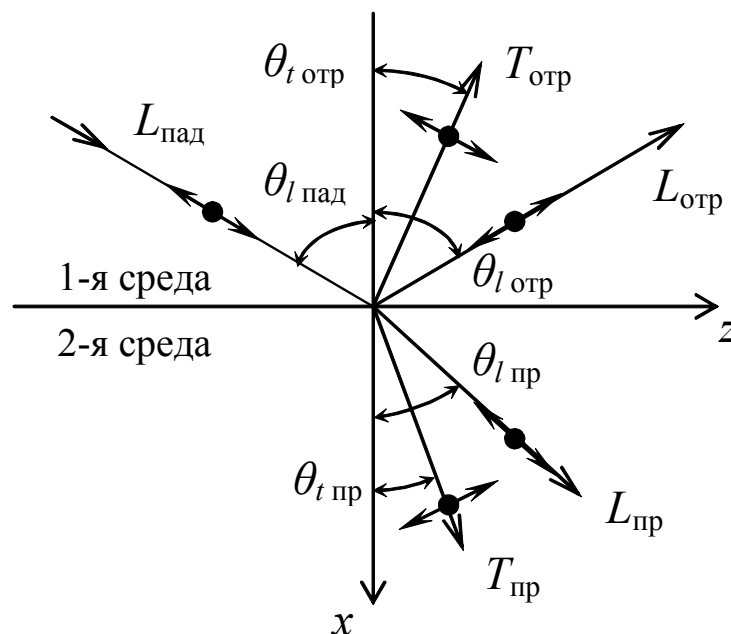


Рис.4.2. Эффект расщепления продольной волны при наклонном падении на границу раздела твердых тел на продольную и сдвиговую волны

При наклонном падении законы Снеллиуса примут вид

$$\frac{\sin \theta_{l \text{ пад}}}{V_{l \text{ пад}}} = \frac{\sin \theta_{l \text{ отр}}}{V_{l \text{ отр}}} = \frac{\sin \theta_{t \text{ отр}}}{V_{t \text{ отр}}} = \frac{\sin \theta_{l \text{ пр}}}{V_{l \text{ пр}}} = \frac{\sin \theta_{t \text{ пр}}}{V_{t \text{ пр}}} \quad (4.16)$$

Здесь $V_{l \text{ пад}} = V_{l \text{ отр}}$ – скорость падающей и отраженной продольной волн в первой среде; $V_{t \text{ отр}}$ – скорость отраженной сдвиговой волны в первой среде; $V_{l \text{ пр}}$ и $V_{t \text{ пр}}$ – скорости распространения про-

шедших продольной и сдвиговой волн во второй среде. Продольная волна падает на границу раздела под углом $\theta_{l \text{ пад}}$. Угол отражения продольной волны $\theta_{l \text{ отр}} = \theta_{l \text{ пад}}$, угол отражения сдвиговой волны – $\theta_{t \text{ отр}}$, углы преломления прошедших продольной и сдвиговой волн обозначены соответственно $\theta_{l \text{ пр}}$ и $\theta_{t \text{ пр}}$. Учитывая, что скорость поперечных волн меньше, чем продольных, из (4.16) имеем: для отраженных волн $V_{t \text{ отр}} < V_{l \text{ отр}}$, отсюда $\theta_{t \text{ отр}} < \theta_{l \text{ отр}}$; для преломленных $V_{t \text{ пр}} < V_{l \text{ пр}}$ и $\theta_{t \text{ пр}} < \theta_{l \text{ пр}}$.

Из выражения (4.16) видно, что направление распространения отраженных и прошедших волн зависит от скорости продольных и сдвиговых волн в рассмотренных средах, а следовательно, от параметров упругости и плотности этих сред. Пусть скорость продольной волны во второй среде больше, чем в первой ($V_{l \text{ пр}} > V_{l \text{ пад}}$). Прирав-

няв $\theta_{l \text{ пр}} = \frac{\pi}{2}$, из (4.16) находим критический угол падения

$\sin \theta_{\text{кр}1} = \frac{V_{l \text{ пад}}}{V_{l \text{ пр}}}$, при котором прошедшая продольная $L_{\text{пр}}$ -волна на-

чинает скользить вдоль поверхности раздела, т.е. начиная с этого угла наблюдается полное отражение для продольных L -волн. При дальнейшем увеличении угла падения до значения, определяемого выра-

жением $\sin \theta_{\text{кр}2} = \frac{V_{l \text{ пад}}}{V_{t \text{ пр}}}$, во второй среде пропадет и прошедшая

сдвиговая $T_{\text{пр}}$ -волна. Она тоже начинает скользить вдоль границы раздела. При углах падения $\theta_{\text{пад}} > \theta_{\text{кр}2}$ граница раздела будет абсолютным отражателем.

Например, акустическая волна падает из воды на поверхность алюминия. Скорость продольной волны в воде $V_l = 1,5$ км/с, а в алюминии $V_l = 6,42$ км/с. При угле падения $\theta = \theta_{\text{кр}1} = 13,5^\circ$ в алюминии исчезает продольная волна, а при угле падения $\theta = \theta_{\text{кр}2} = 29,6^\circ$ в алюминии исчезает и сдвиговая волна. Для углов падения акустической волны из воды на поверхность алюминия $\theta_{\text{пад}} > 29,6^\circ$ алюминий будет абсолютным отражателем.

2. Если на границу раздела падает сдвиговая волна, поляризованная в плоскости падения (вертикальная поляризация), то и в этом случае наблюдается эффект расщепления волн на сдвиговую и продольную волны (рис.4.3).

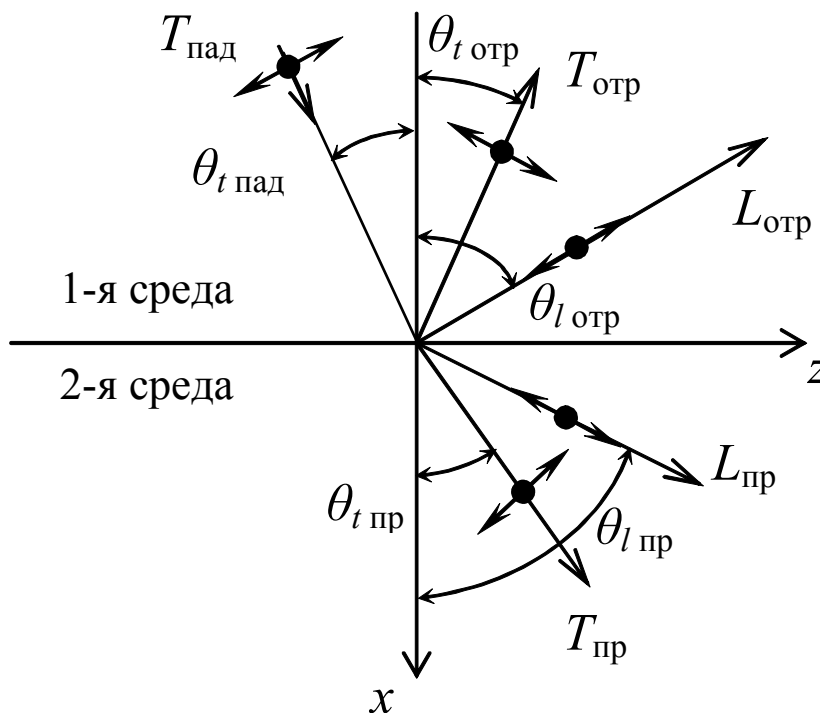


Рис.4.3. Ориентация лучей продольных и сдвиговых волн при наклонном падении сдвиговой волны вертикальной поляризации

Закон Снеллиуса для рассматриваемой ситуации запишется в следующем виде:

$$\frac{\sin \theta_{t \text{ пад}}}{V_{t \text{ пад}}} = \frac{\sin \theta_{t \text{ отр}}}{V_{t \text{ отр}}} = \frac{\sin \theta_{l \text{ отр}}}{V_{l \text{ отр}}} = \frac{\sin \theta_{t \text{ пр}}}{V_{t \text{ пр}}} = \frac{\sin \theta_{l \text{ пр}}}{V_{l \text{ пр}}}. \quad (4.17)$$

Из (4.17) с учетом скорости распространения сдвиговых и продольных волн следует, что так как $V_{t \text{ отр}} = V_{t \text{ пад}}$, то $\theta_{t \text{ отр}} = \theta_{t \text{ пад}}$, так как $V_{l \text{ отр}} > V_{t \text{ пад}}$, то $\theta_{l \text{ отр}} > \theta_{t \text{ пад}}$, и так как $V_{l \text{ пр}} > V_{t \text{ пр}}$, то $\theta_{l \text{ пр}} > \theta_{t \text{ пр}}$. Угол отражения продольной волны всегда больше угла падения, поэтому расщепление лучей в первой среде наблюдается до момента, когда продольная волна начинает скользить вдоль границы

раздела $\theta_{l \text{ отр}} = \frac{\pi}{2}$. При дальнейшем увеличении угла падения в первой среде остается лишь одна сдвиговая волна.

Пусть скорость поперечной волны во второй среде больше, чем в первой, $V_{t \text{ пр}} > V_{t \text{ пад}}$. Считая $\theta_{l \text{ пр}} = \frac{\pi}{2}$, находим первый критический

угол падения $\sin \theta_{\text{кр}1} = \frac{V_{t \text{ пад}}}{V_{l \text{ пр}}}$, при котором прошедшая продольная

$L_{\text{пр}}$ -волна распространяется вдоль поверхности раздела и наблюда-

ется полное отражение. Приравняв $\theta_{t \text{ пр}} = \frac{\pi}{2}$, находим второй угол

падения из условия $\sin \theta_{\text{кр}2} = \frac{V_{t \text{ пад}}}{V_{t \text{ пр}}}$, при котором прошедшая сдвиго-

вая $T_{\text{пр}}$ -волна скользит вдоль границы и поле во второй среде отсутствует.

3. Если на границу раздела двух твердых сред падает сдвиговая волна, поляризованная горизонтально, то в связи с тем, что частицы первой среды совершают колебания перпендикулярно к плоскости падения, отсутствует составляющая сил в направлении распространения падающей волны. В этом случае эффект расщепления лучей не наблюдается. Отраженный и прошедший лучи формируются сдвиговыми волнами, поляризованными также горизонтально (рис.4.4).

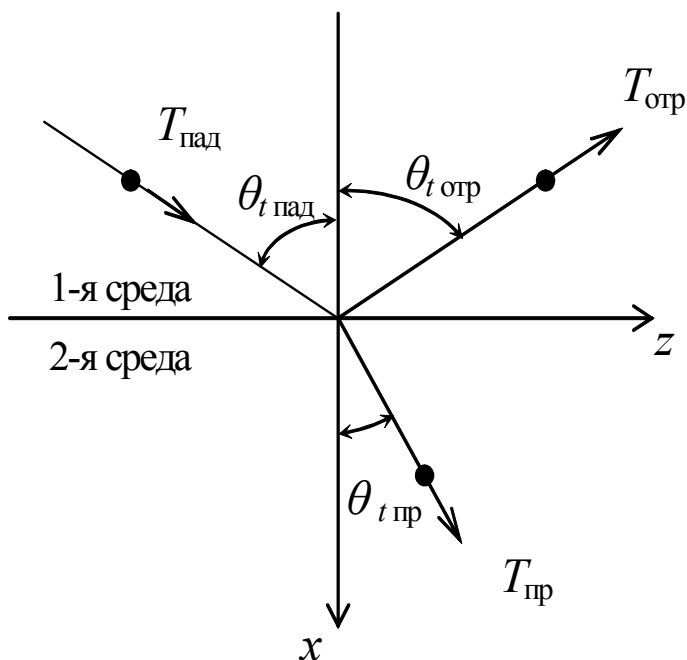


Рис.4.4. Падение сдвиговой волны горизонтальной поляризации на границу раздела твердых сред

Ориентация лучей в этом случае может быть определена из соотношения

$$\frac{\sin \theta_{t \text{ пад}}}{V_{t \text{ пад}}} = \frac{\sin \theta_{t \text{ отр}}}{V_{t \text{ отр}}} = \frac{\sin \theta_{t \text{ пр}}}{V_{t \text{ пр}}}. \quad (4.18)$$

Важно помнить, что если одна из сред не поддерживает распространение сдвиговых волн (например, граница твердого тела и жидкости), то в ней остается лишь продольная волна, в то время как в твердом теле эффект расщепления наблюдаться будет. В случае падения сдвиговой волны горизонтальной поляризации из твердого тела на границу с жидкостью в твердом теле наблюдается отраженная сдвиговая волна горизонтальной поляризации, в то время как прошедшей волны в жидкость вообще не будет.

Для конструирования акустических линий задержки и фильтров чаще всего используются пьезоэлектрики (кварц, ниобат лития, титанат бария, танталат лития, пьезокерамика и др.), граничащие с воздухом. Поскольку акустические сопротивления воздуха и твердых материалов отличаются на два порядка, то долю мощности, прошедшую из твердого материала в воздух, можно считать нулевой. Коэффициент отражения продольной волны от границы твердое тело – воздух для падающей продольной волны вычисляется по формуле

$$R_{ll} = \frac{\sin(2\theta_{l \text{ пад}}) \sin(2\theta_{t \text{ отр}}) - (V_{l \text{ пад}}/V_{t \text{ отр}})^2 \cos^2(2\theta_{t \text{ отр}})}{\sin(2\theta_{l \text{ пад}}) \sin(2\theta_{t \text{ отр}}) + (V_{l \text{ пад}}/V_{t \text{ отр}})^2 \cos^2(2\theta_{t \text{ отр}})} \quad (4.19)$$

Часть мощности падающей продольной волны преобразуется в мощность сдвиговой волны. Для отраженной сдвиговой волны при падении продольной волны коэффициент трансформации

$$T_{tl} = \frac{2(V_{l \text{ пад}}/V_{t \text{ отр}}) \sin(2\theta_{l \text{ пад}}) \cos(2\theta_{t \text{ отр}})}{\sin(2\theta_{l \text{ пад}}) \sin(2\theta_{t \text{ отр}}) + (V_{l \text{ пад}}/V_{t \text{ отр}})^2 \cos(2\theta_{t \text{ отр}})} \quad (4.20)$$

В случае падения сдвиговой волны вертикальной поляризации на границу воздух – твердое тело коэффициент отражения совпадает с коэффициентом отражения (4.19)

$$R_{tt} = R_{ll}, \quad (4.21)$$

а коэффициент трансформации сдвиговой волны в продольную вычисляется по формуле

$$T_{lt} = \frac{\sin(2\theta_{t \text{ пад}})}{\sin(2\theta_{l \text{ отр}})} T_{tl}. \quad (4.22)$$

Приравняв числитель выражения (4.19) нулю, можно определить угол падения, при котором коэффициент отражения продольной волны равен нулю, т.е. происходит преобразование одного типа волны в другой (падающая продольная акустическая волна переходит в отраженную сдвиговую). Например, для плавленого кварца этот эффект наблюдается, если падающая продольная акустическая волна ориентирована под углом $\theta_l = 42^\circ$ относительно нормали к границе раздела сред. В акустоэлектронике возбудить сдвиговую волну гораздо слож-

нее, чем продольную. На рассмотренном выше эффекте строятся простые преобразователи типов волн (рис.4.5).

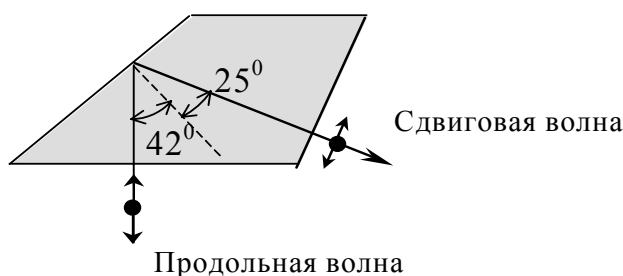


Рис.4.5. Преобразование продольной волны в поперечную при помощи призмы из плавленного кварца

Рассмотренный преобразователь является взаимным устройством, т.е. если сдвиговая волна падает на призму справа под углом 25° к внутренней грани, происходит преобразование сдвиговой волны в продольную. Внешние грани перпендикулярны входящему и выходящему лучам.

Преобразование типов волн возможно и при использовании эффекта полного отражения от границы раздела. При угле падения, равном 45° градусов, коэффициент отражения как продольной, так и сдвиговой волн равен 1. Наблюдается полное отражение.

Из выражений для коэффициентов отражения (4.19), (4.21) видно, что существует такой угол падения, при котором значения R_{ll} и R_{tt} обращаются в нуль, т. е. соответствующей отраженной волны не будет.

Явление расщепления и явление полного отражения акустических волн широко используются в преобразователях типов волн радиоэлектронной аппаратуры, а также для создания акустических волноводов.

4.4. Поверхностные акустические волны

Поверхностные акустические волны широко используются в радиотехнике для создания таких устройств, как линии задержки и фильтры. Скорость распространения акустических волн существенно меньше скорости распространения электромагнитных волн той же частоты, соответственно длина акустической волны значительно меньше электромагнитной, поэтому все устройства получают су-

щественно компактной. До сих пор мы рассматривали только продольные и сдвиговые акустические волны, распространяющиеся во всем пространстве материала. Поверхностные волны отличаются от пространственных тем, что вся их энергия сосредоточена вблизи границы раздела материалов с различными свойствами. Теория поверхностных волн впервые была предложена английским физиком Дж. У. Рэлеем в 1885 г. Он теоретически предсказал и доказал возможность распространения в тонком поверхностном слое твердого тела, граничащего с воздухом, поверхностных акустических волн, которые принято называть **рэлеевскими волнами** – *R*-волнами. В задаче Рэлея ограничимся постановкой задачи и ее конечными результатами. Имеется плоская граница вакуум – изотропная твердая среда. Граница раздела совпадает с плоскостью xy , ось z направлена вглубь твердой среды.

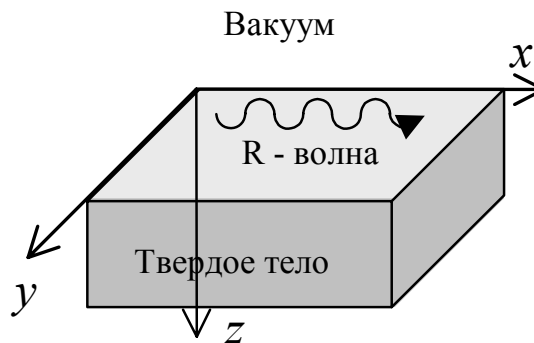


Рис.4.6. Образование поверхностной волны Рэлея на границе твердого тела с вакуумом

Исходными для решения задачи являются волновые уравнение для вектора смещения частиц среды твердого тела

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{u}_l + k_l^2 \vec{u}_l &= 0, \\ \nabla^2 \vec{u}_t + k_t^2 \vec{u}_t &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

При решении используется граничное условие, состоящее в том, что на границе с вакуумом напряжения должны отсутствовать.

$$T_{iz} = 0$$

для $i = x, y, z$.

Решение ищется в виде плоских гармонических волн, бегущих вдоль оси x в твердом полупространстве. С учетом того, что энергия поверхностной волны сосредоточена вблизи границы твердого тела с вакуумом, амплитуда смещения частиц среды, возмущенной этой волной, должна экспоненциально убывать с ростом координаты z .

Рэлеевская волна представляет собой сложную акустическую волну, образованную совокупностью продольных и сдвиговых компонентов вектора смещения. Решение уравнений (4.23) для смещения частиц в поверхностной волне Рэля получается в следующем виде:

$$\dot{u}_x = A \left[e^{-qz} + \frac{2qs}{(k_R^2 + s^2)} e^{-sz} \right] e^{j(\omega t - k_R x)}, \quad (4.24)$$

$$\dot{u}_z = -A \frac{jq}{k_R} \left[e^{-qz} - \frac{2k_R^2}{(k_R^2 + s^2)} e^{-sz} \right] e^{j(\omega t - k_R x)}, \quad (4.25)$$

$$\dot{u}_y = 0, \quad (4.26)$$

где параметры $q = \sqrt{k_R^2 - k_l^2}$ и $s = \sqrt{k_R^2 - k_t^2}$ зависят от волновых чисел:

$$k_l = \frac{\omega}{V_l}, \quad k_t = \frac{\omega}{V_t}, \quad k_R = \frac{\omega}{V_R}.$$

V_l, V_t, V_R – скорость распространения продольной, сдвиговой и поверхностной волны в рассматриваемой среде. Из приведенных решений (4.24), (4.25) четко виден экспоненциальный закон убывания амплитуды смещений при удалении точки наблюдения от границы внутрь твердого тела (рис.4.7). Толщина локализации волны Рэля составляет 1–2 длины волны λ_R . На глубине λ_R плотность энергии в волне составляет примерно 5% плотности у поверхности.



Рис.4.7. Зависимость амплитуды поверхностной волны вблизи границы раздела сред

Вследствие сдвига фазы колебаний нормальной компоненты смещения u_z относительно продольной составляющей u_x на чет-

верть периода (наличие множителя j у компоненты u_z в формуле (4.25)), движение частиц среды происходит по эллиптической траектории. Большая ось эллипса перпендикулярна поверхности твердого тела, а малая – параллельна направлению распространения волны.

Скорость распространения поверхностной волны Рэлея находится из решения дисперсионного уравнения

$$\left(\frac{V_R}{V_t}\right)^6 - 8\left(\frac{V_R}{V_t}\right)^4 + 8\left[3 - 2\left(\frac{V_t}{V_l}\right)^2\right]\left(\frac{V_R}{V_t}\right)^2 - 16\left(1 - \frac{V_t}{V_l}\right)^2 = 0, \quad (4.27)$$

где V_t , V_l и V_R – скорости сдвиговой, продольной и поверхностной волн. Это уравнение имеет действительный корень – корень Рэлея, который приближенно можно представить в следующем виде:

$$\frac{V_R}{V_t} \approx \frac{0,875 + 1,125\sigma}{1 + \sigma}. \quad (4.28)$$

При изменении коэффициента Пуассона примерно $\sigma \approx 0,05 \div 0,5$ фазовая скорость поверхностной волны Рэлея V_R изменяется от $0,917 V_t$ до $0,958 V_t$. Скорость V_R зависит только от упругих свойств твердого тела и не зависит от частоты, т.е. рэлеевская волна не обладает дисперсией. Скорость поверхностной волны существенно меньше скорости продольной волны и немного меньше скорости сдвиговой волны. Поскольку скорость волны Рэлея близка к скорости поперечной волны и большая часть ее упругой энергии в среде связана с компонентами поперечной, а не продольной волны, волна Рэлея во многих отношениях аналогична поперечной волне. Так, если шероховатость поверхности или воздушная нагрузка не оказывают преобладающего влияния, то затухание волны Рэлея в большинстве материалов того же порядка, что и затухание сдвиговой волны.

Кроме R -волн существует целый ряд других типов поверхностных акустических волн (ПАВ): поверхностные волны в твердом слое, лежащем на твердом упругом полупространстве (волны Лява), волны в пластинках (волны Лэмба), волны на искривленных твердых поверхностях, клиновые волны и т.д.

Впервые на поверхностные волны обратили внимание при анализе сейсмических колебаний. Наблюдатель обычно регистрирует 3 сигнала, приходящих от эпицентра земных толчков. Первым приходит сигнал, переносимый продольной акустической волной, как са-

мой быстрой. Второй сигнал приносит волна сдвиговая. Источником третьего сигнала является поверхностная волна (рис.4.8).

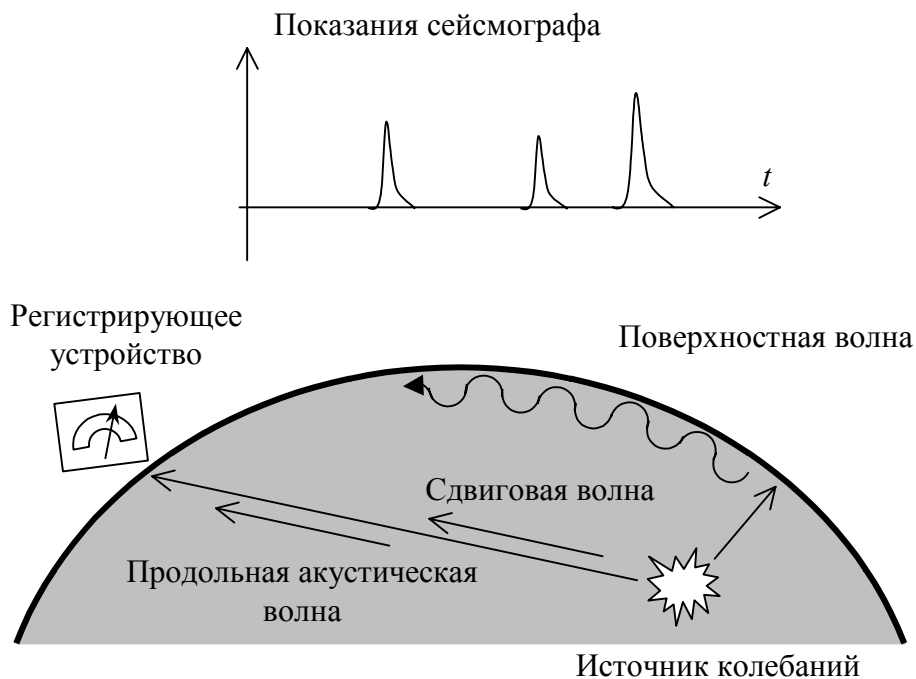


Рис. 4.8. Распространение продольных, сдвиговых и поверхностных волн, вызванных колебаниями земной коры

Энергия поверхностной акустической волны сосредоточена в тонком приповерхностном слое порядка 1–2 длин волн. Широту применения поверхностных акустических волн в радиотехнике обусловили их малое затухание, небольшая скорость распространения, отсутствие зависимости постоянной распространения от частоты (отсутствие дисперсии) и простота их возбуждения в широком частотном диапазоне. Некоторые конструкции устройств на ПАВ рассмотрены в следующем разделе.

4.5. Задачи для самостоятельного решения

- 4.1. В
вычислить время пробега продольной акустической волны по алюминиевому стержню длиной 3 м, если частота колебаний составляет: а) 1 кГц; б) 1 МГц.
- 4.2. С
равнить скорость продольной и сдвиговой акустических волн, распространяющихся в образце алюминия большого размера.
- 4.3. В
образце из плавленого кварца распространяется объёмная продольная волна с частотой $f = 30$ МГц и амплитудой деформаций порядка 10^{-9} . Рассчитать скорость распространения, длину волны, амплитуду смещения, амплитуду колебательной скорости и интенсивность.
- 4.4. В
вычислить коэффициент отражения плоской продольной волны, падающей на границу раздела воздух – сапфир, если волна падает по нормали к границе раздела сред. Удельная плотность сапфира $\rho_0 = 3,97$ кг/м³, скорость продольной волны в сапфире $V_l = 11,1$ км/с.
- 4.5. В
вертикально поляризованная акустическая волна падает из алюминия на границу с водой. Вычислить углы отраженных и прошедших волн, если угол падения равен 10 градусам относительно нормали к поверхности границы.
- 4.6. В
вычислить время прохождения поверхностной волной, возбужденной на границе плавленого кварца с воздухом, отрезка пути в 10 мм.
- 4.7. Плоская продольная волна распространяется в полиэтилене со скоростью $V_l = 1,95$ км/с и падает под углом θ на границу с сапфиром (удельная плотность сапфира $\rho_0 = 3,97$ кг/м³, скорость продольной волны в сапфире $V_l = 11,1$ км/с, сдвиговой волны $V_t = 6,04$ км/с). Определить диапазон углов падения, при котором в сапфире будет распространяться только сдвиговая волна. Определить диапазон углов падения, при котором граница будет полным отражателем.

Глава 5. Возбуждение и излучение акустических волн

5.1. Излучение акустических волн

Самыми распространенными источниками акустических волн являются колеблющиеся тела. Колеблющиеся тела (например, мембрана) перемещают прилегающие к ним частицы газа или жидкости, «выталкивая» их в окружающую среду в положительный полупериод колебания и «втягивая» их из окружающей среды в отрицательный полупериод колебаний. При медленных колебаниях тел этим почти все и ограничивается. Однако даже при сравнительно медленных колебаниях тела (очень низких частотах) часть энергии идет на излучение звука, т.е. на совершение сжатий и разряжений, на изменение плотности среды благодаря ее сжимаемости. Эти изменения плотности «отпочковываются» от колеблющегося тела и распространяются далее в виде упругих волн. С повышением частоты эффективность излучения звука увеличивается, в то время как эффект «выталкивания» и «втягивания» частиц среды ослабевает. При определенных условиях большая часть механической энергии колеблющегося тела превращается в энергию распространяющейся звуковой волны.

Решение задачи излучения акустических волн начнем с наиболее простого случая, когда источником колебаний является пульсирующая сфера радиусом $r = a$. При малых относительных размерах ($a \ll \lambda$) такой источник называют точечным излучателем нулевого порядка или монополю. Монополь в однородной изотропной среде создает сферическую расходящуюся волну. Колебательная скорость частиц пульсирующей сферы

$$v = \operatorname{Re}\left(v_0 e^{j\omega t}\right),$$

где v_0 – амплитуда колебаний сферы.

В теории продольных акустических волн при решении задач об излучении часто пользуются понятием скалярный потенциал. Ввиду того, что колебание частиц среды происходит только вдоль направления распространения волны (в радиальном направлении), вихревое движение частиц среды отсутствует, и, следовательно, выполняется условие $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$. Из теории векторного анализа известно, что усло-

вие $\text{rot grad } \psi = 0$ выполняется для любой произвольной скалярной функции ψ , поэтому для колебательной скорости корректна запись

$$\vec{v} = -\text{grad } \psi, \quad (5.1)$$

где скалярная функция ψ называется скалярным потенциалом акустического поля. Знак в выражении (5.1) выбран из физических соображений. Подставив это выражение в уравнение движения (2.1), найдем связь между акустическим давлением p_a и скалярным потенциалом ψ :

$$p_a = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (5.2)$$

Теперь задача сводится к нахождению скалярного потенциала ψ , а затем по (5.1) и (5.2) определяются искомые величины колебательной скорости частиц среды \vec{v} и акустического давления p_a в произвольной точке пространства.

Потенциал поля на расстоянии r от источника, излучающего расходящуюся сферическую волну, будем искать в виде

$$\psi = \frac{1}{r} A e^{j(\omega t - k r + \varphi)}, \quad (5.3)$$

где A и φ – неизвестные пока величины.

Радиальная компонента колебательной скорости с учетом (5.1) будет равна

$$v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = A \left(\frac{1}{r^2} + \frac{j k}{r} \right) e^{j(\omega t - k r + \varphi)}. \quad (5.4)$$

На расстоянии $r = a$ нормальные компоненты колебательной скорости частиц сферы и близлежащих частиц среды одинаковы, поэтому можно записать следующее уравнение:

$$A \left(\frac{1}{a^2} + \frac{j k}{a} \right) e^{j(\omega t - k a + \varphi)} = v_0 e^{j \omega t}.$$

Из него определяются амплитуда A и фаза φ скалярного потенциала

$$A = \frac{v_0 a^2}{1 + j k a} \quad \text{и} \quad \varphi = k a.$$

Потенциал (5.3) принимает вид

$$\psi = \frac{1}{r} \frac{v_0 a^2}{1 + j k a} e^{j(\omega t - k r + k a)}. \quad (5.5)$$

Колебательная скорость частиц среды на расстоянии r от центра пульсирующей сферы согласно (5.4) может быть определена по формуле

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{v_0 a^2}{1 + j k a} \left(\frac{1}{r} + j k \right) e^{j(\omega t - k r + k a)}. \quad (5.6)$$

Акустическое давление

$$p_a = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{j \rho_0 \omega v_0 a^2}{1 + j k a} e^{j(\omega t - k r + k a)}. \quad (5.7)$$

По существу, на этом задача об излучении волн пульсирующей сферой решена.

В задачах излучения большое значение имеет параметр, называемый «сопротивление излучения». Эта величина в общем случае комплексная. Комплексное сопротивление излучения, или механический импеданс, – это отношение силы, действующей со стороны среды на поверхность S колеблющегося тела, к колебательной скорости поверхности источника. Для пульсирующей сферы с учетом (5.6) и (5.7) сопротивление излучения вычисляется по формуле

$$Z = S \left(\frac{p_a}{v_r} \right)_{r=a} = \rho_0 V_l S \frac{(k a)^2 + j k a}{1 + (k a)^2} = X + j Y. \quad (5.8)$$

В выражении (5.8) $V_l = \frac{\omega}{k}$ – скорость распространения акустической волны в пространстве.

Активная и реактивная части импеданса будут

$$X = \rho_0 V_l S \frac{(k a)^2}{1 + (k a)^2}, \quad Y = \rho_0 V_l S \frac{k a}{1 + (k a)^2}. \quad (5.9)$$

Формулы (5.9) показывают, что активная часть сопротивления излучения пропорциональна акустическому сопротивлению среды $Z_a = \rho_0 V_l$, площади поверхности сферы S и квадрату частоты

$(ka)^2 = \frac{\omega^2}{V_l^2} a^2$. Реактивная часть сопротивления излучения пропорциональна акустическому сопротивлению, площади поверхности сферы и частоте $\left(ka = \frac{\omega}{V_l} a\right)$.

Из графиков, приведенных на рис. 5.1, видно, что на низких частотах $(ka) < 0,5$ превалирует реактивная часть сопротивления излучения, а на высоких частотах $(ka) > 2$ превалирует активная часть. Реактивное сопротивление связано с энергией, не распространяющейся, а как бы запасенной в ближнем поле около пульсирующей сферы. Активное сопротивление связано с энергией распространяющейся акустической волны и характеризует долю излученной мощности.

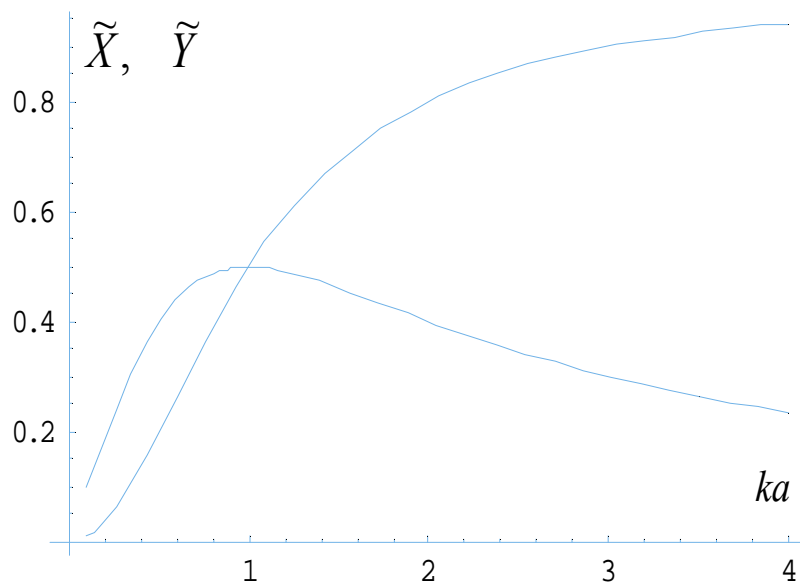


Рис.5.1. Зависимость нормированной активной и реактивной составляющих сопротивления излучения пульсирующей сферы от частоты

Формулы (5.9) дают возможность найти условия, при которых выполняется соотношение $X > Y$ и излучение пульсирующей сферы эффективно. Так, расчет показывает, что на частоте 2000 Гц это условие начинает выполняться, если $ka \approx 1$, откуда радиус пульсирующей сферы должен быть больше 2,7 см.

Выражения (5.6), (5.7) позволяют определить интенсивность распространяющейся от источника колебаний акустической волны:

$$J = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{p}_a v_r^*) = \frac{1}{2} \rho_0 V_l v_0^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{(k a)^2}{1 + (k a)^2}. \quad (5.10)$$

Полная излученная мощность может быть рассчитана интегрированием интенсивности звука (5.10) на расстоянии r от источника по сфере радиусом r , окружающей источник излучения:

$$P = \oint_S J dS.$$

Поскольку пульсирующая сфера создает акустическое поле с одинаковой интенсивностью по всем направлениям, полную излученную мощность можно вычислить проще:

$$P = J(r) 4 \pi r^2 = 2 \pi \rho_0 V_l v_0^2 a^2 \frac{(k a)^2}{1 + (k a)^2}. \quad (5.11)$$

С учетом того что частицы среды колеблются с постоянной частотой ω , амплитуда смещения частиц

$$u_0 = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{k V_l},$$

выражение (5.11) можно записать следующим образом:

$$P = 2 \pi \rho_0 V_l^3 u_0^2 \frac{(k a)^4}{1 + (k a)^2}. \quad (5.12)$$

Из формулы (5.12) видно, что на низких частотах ($k^2 a^2 \ll 1$) излучаемая мощность при фиксированной амплитуде смещения u_0 пропорциональна 4-й степени частоты, а на высоких частотах ($k^2 a^2 \gg 1$) – 2-й степени частоты. Таким образом, на низких частотах процесс излучения акустических волн малоэффективен, что связано с большой массой прилегающего к излучателю соколеблющегося слоя среды.

Следующим по сложности элементарным источником излучения является диполь. Диполь представляет собой комбинацию двух точечных источников - монополей, колеблющихся в противофазе и находящихся друг от друга на малом расстоянии. Типичным примером

такого источника служит колеблющийся камертон. Анализ излучения диполя приведен в [1].

На практике большое значение имеет задача о генерации акустических волн круглым диском, называемым поршневым излучателем. В ультразвуковом диапазоне таким излучателем является пьезоэлектрическая пластинка, радиус которой много больше длины излучаемой волны. Решение задачи в этом случае, как и в случае диполя, существенно усложняется [1].

Излучение любого источника характеризуется определенным распределением интенсивности формируемого акустического поля в пространстве. Угловое распределение акустического давления или интенсивности в пространстве называется амплитудной характеристикой направленности или диаграммой направленности:

$$\Phi_p(\theta, \varphi) = \frac{p_a(\theta, \varphi)}{p_{a \max}}, \quad (5.10)$$

$$\Phi_J(\theta, \varphi) = \frac{J(\theta, \varphi)}{J_{\max}}, \quad (5.11)$$

где $p_a(\theta, \varphi)$ - угловая зависимость звукового давления на расстоянии r от источника;

$J(\theta, \varphi)$ – угловая зависимость интенсивности звука на расстоянии r от источника;

θ, φ – углы в сферической системе координат;

$p_{a \max}$ – значение звукового давления в направлении максимального излучения на том же расстоянии;

J_{\max} – значение интенсивности звука в направлении максимального излучения на том же расстоянии.

Расстояние r выбирается таким, чтобы акустическое поле в точке наблюдения было уже сформировавшимся, т.е. удовлетворяющим критерию дальней зоны.

Излучение пульсирующей сферы равномерно по всем направлениям, т.е. не обладает направленностью, или изотропно. В случае поршневого излучателя формируется направленное излучение, максимум которого ориентирован перпендикулярно плоскости поршня. Степень концентрации акустического поля зависит от соотношения радиуса поршня a и длины волны λ :

$$\Phi_p(\theta, \varphi) = \frac{2 J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} = \frac{2 J_1\left(\frac{2 \pi a}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{2 \pi a}{\lambda} \sin \theta},$$

где $J_1(k a \sin \theta)$ – функция Бесселя первого порядка от аргумента $k a \sin \theta$ [5]. Угол θ отсчитывается от нормали к плоскости поршня.

На рис.5.2 показаны графики угловой зависимости уровня излучения поршневой диафрагмы для двух значений радиуса поршня $a = 0,5\lambda$ и $a = 2\lambda$. Ясно, что на низких частотах (размер диафрагмы мал по сравнению с длиной волны, в нашем случае $a = 0,5\lambda$) излучение гораздо менее направленное, чем на высоких частотах. На ультразвуковых частотах можно создать акустический излучатель с очень высокой степенью концентрации энергии, например, для системы метеорологической локации облачных слоев и определения по отраженному сигналу концентрации влаги в них.

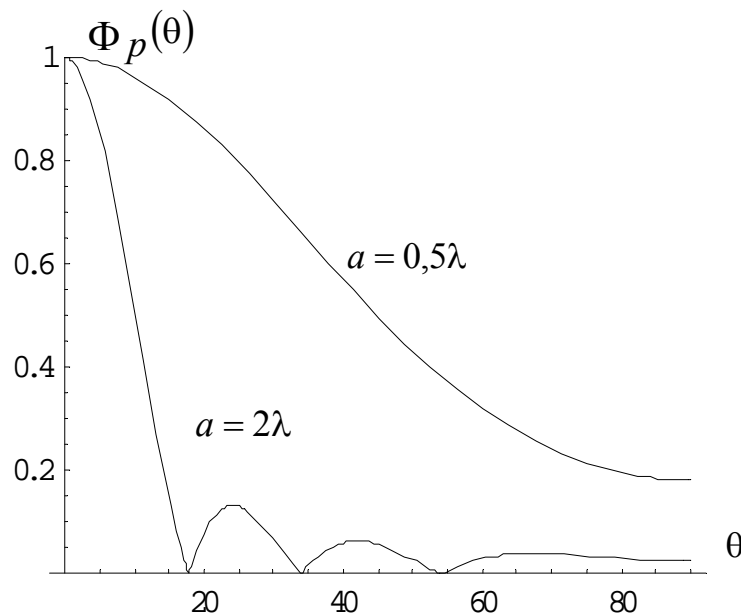


Рис.5.2. Диаграмма направленности поршневого излучателя для двух значений радиуса поршня

Для количественной оценки направленных свойств акустического излучателя вводится коэффициент осевой концентрации D , характеризующий отношение интенсивности акустического поля направленного излучателя в направлении максимального излучения к интен-

сивности ненаправленного излучателя на том же расстоянии, когда мощности этих излучателей одинаковы. Коэффициент осевой концентрации может быть рассчитан по формуле

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_p(\theta, \varphi)^2 \sin \theta d\theta d\varphi}. \quad (5.12)$$

С учетом, что поршневой излучатель создает акустическое поле только в полупространстве и это поле не зависит от азимутального угла φ , полученное выражение упрощается:

$$D = \frac{2}{\int_0^{\pi/2} \Phi_p(\theta, \varphi)^2 \sin \theta d\theta}.$$

Коэффициент осевой концентрации для рассмотренного выше поршневого излучателя $D = 9$ для радиуса поршня $a = 0,5\lambda$ и $D = 157$ для $a = 2\lambda$. Изотропный излучатель в виде пульсирующей сферы имеет коэффициент $D = 1$. При этом нужно помнить, что она излучает во все пространство, и использовать формулу (5.12).

Для диполя характеристика направленности $\Phi_p(\theta) = \sin \theta$ и имеет вид восьмерки. Коэффициент осевой концентрации при этом $D = 3$.

Указанные излучатели в виде пульсирующей сферы, диполя и поршневой диафрагмы относятся к случаю излучения звука механическими колебаниями твердых тел. Существует и много других физических механизмов, приводящих к излучению звука. Например, ферромагнитный стержень, помещенный в переменное магнитное поле, незначительно меняет свои линейные размеры и совершает продольные колебания соответствующей частоты. Таким образом можно получить ультразвуковые волны частотой до 50 кГц.

Тепловой механизм изменения температуры участка среды тепловым импульсом приводит к сжатию и последующему расширению некоторого объема среды (звук при электрическом пробое участка среды). Нестационарный поток газа или жидкости также приводит к излучению акустических колебаний (звук реактивной струи космической ракеты). Звук генерируется при обтекании потоком газа или жидкости твердых тел (звук при обтекании воздушным потоком).

Сюда можно отнести и генерацию звука различными свистками, излучение звука голосовыми связками человека.

Инфразвуковые волны возникают в результате вибрации при работе различных узлов механизмов, двигателей и т.д. В атмосфере инфразвуковые волны возникают во многих случаях, например при ядерных взрывах или при землетрясениях. Инфразвуковые волны большой интенсивности искусственно излучать практически невозможно, так как мощность излучения пропорциональна квадрату частоты и на низких частотах она мала. В этом диапазоне трудно создать и направленный акустический излучатель.

Для излучения и приема акустических волн звукового и ультразвукового диапазонов используются различные преобразователи. Ниже рассматриваются некоторые способы возбуждения акустических волн.

5.2. Электромеханические преобразователи

Электромеханические преобразователи позволяют преобразовать электрическую энергию в механическую и наоборот. В области низких частот (ниже 20 кГц) широко используются микрофоны и громкоговорители. Наиболее часто применяются громкоговорители диффузорного и рупорного типа. Конструкция электродинамического (диффузорного) громкоговорителя (рис.5.3.) состоит из кольцеобразного магнита с большой коэрцитивной силой (1), к которому крепится корпус диффузора.

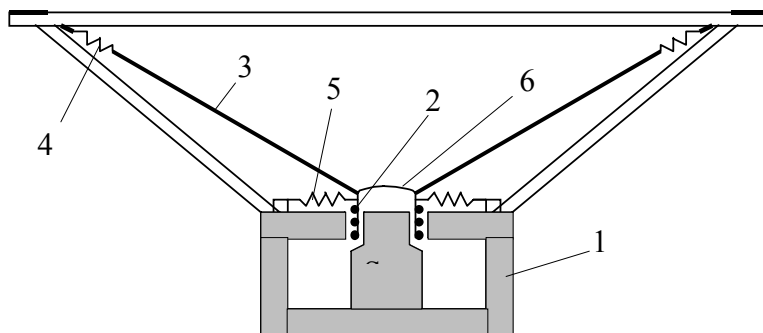


Рис.5.3. Конструкция динамического громкоговорителя

В воздушном кольцевом зазоре размещена звуковая катушка (2), на которую подается переменное напряжение звуковой частоты. Ток, проходя через катушку, взаимодействует с постоянным магнитным потоком и создает силу, приводящую к продольным колебаниям катушки и скрепленного с ней диффузора (3). По внешнему краю диффузор имеет гофрированный подвес (4). В низкочастотных головках вместо гофра применяют эластичный подвес из резины или латекса. Назначение подвеса заключается в создании поршнеобразного характера смещения диффузора в широком диапазоне частот. Вершина диффузора и звуковая катушка удерживаются в центре с помощью гофрированной шайбы (5). От пыли звуковая катушка и магнитная система предохраняются с помощью защитного колпачка (6). Рассмотренное устройство является взаимным, т. е. его можно использовать и для обратного преобразования акустических колебаний в электрический сигнал. Однако на практике для этого используют специальные устройства, называемые микрофонами. Конструкция микрофона существенно зависит от используемого принципа преобразования звуковых колебаний в электрический сигнал. Например, электродинамический микрофон полностью идентичен по своей структуре динамическому громкоговорителю, но выполнен в миниатюре.

Для расчета уровня и диаграммы направленности динамических громкоговорителей и микрофонов часто используется модель колеблющейся плоской диафрагмы.

5.3. Пьезоэлектрические преобразователи

Пьезоэлектрические преобразователи широко применяются в акустике для генерирования и приема волн ультразвуковых и гиперзвуковых частот, а также волн звукового диапазона. Пьезоэлектрический преобразователь позволяет преобразовывать электрические сигналы в упругие колебания и наоборот, работая излучателем или приемником акустических волн.

Рассматриваемые преобразователи сигналов используют особый вид кристаллического вещества – пьезоэлектрики, в которых при сжатии или растяжении в определенных направлениях возникает электрическая поляризация (прямой пьезоэлектрический эффект).

“Пьезо” в переводе с греческого означает “давить”. Обратный пьезоэлектрический эффект состоит в возникновении деформаций пьезопластинки под действием электрического поля. Связь между механическими и электрическими переменными (деформацией и электрическим полем) носит в обоих случаях линейный характер. Для того, чтобы обнаружить пьезоэффект, на грани кристаллической пластинки накладываются металлические обкладки. Если обкладки разомкнуты, то при деформации пластинки возникает разность потенциалов. При подключении к обкладкам внешней ЭДС кристалл деформируется.

Механизм пьезоэффекта можно пояснить на примере кристалла кварца (рис.5.4), элементарная ячейка которого содержит три молекулы SiO_2 и схематично показана на рис. 5.5. При сжатии вдоль оси X положительный ион 1 (Si^+) и отрицательный ион 2 (O^-) перемещаются вглубь ячейки, в результате чего на выделенных на рисунке плоскостях появляются заряды. При растяжении на этих плоскостях возникают заряды противоположного знака.

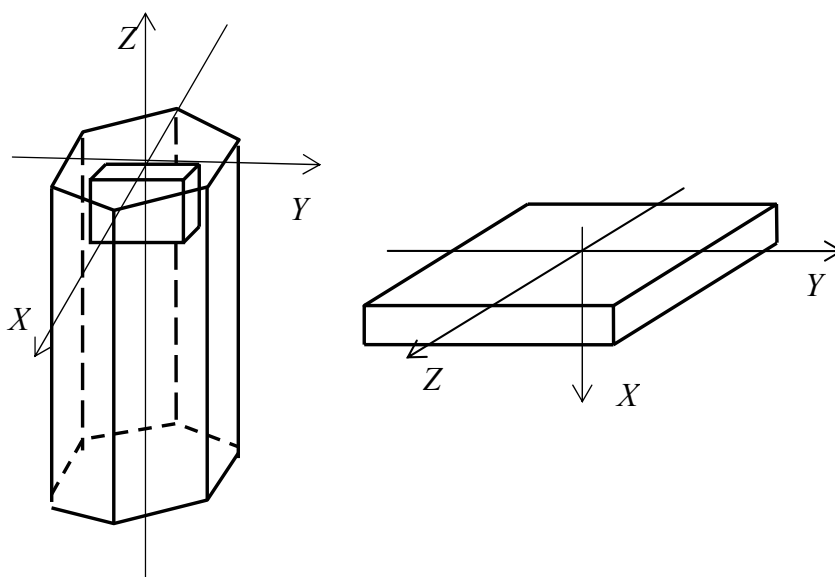


Рис.5.4. Кристалл кварца и пример вырезания из него пластинки для пьезоэлектрического преобразователя

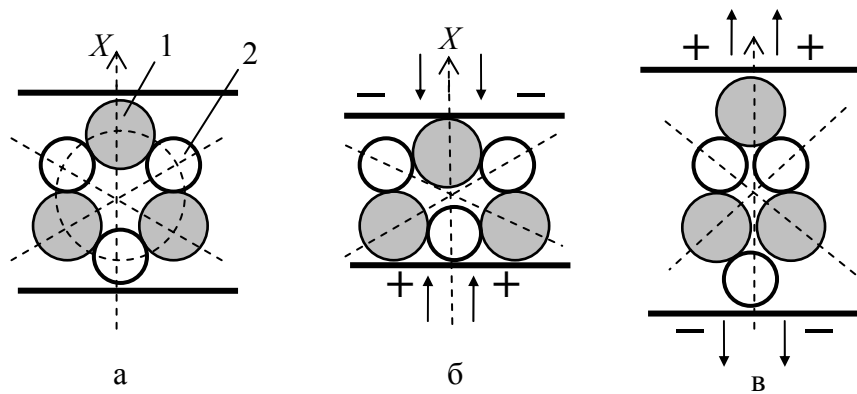


Рис.5.5. Схема структуры кварца: проекции ионов Si^+ (1) и O^- (2) на плоскость, перпендикулярную оси X :
 темные кружки соответствуют ионам Si^+ ; светлые – паре ионов O^- ;
 а – недеформированное состояние; б - сжатие вдоль оси X ;
 в – растяжение вдоль оси X

Количественной характеристикой пьезоэффекта является совокупность констант – коэффициентов пропорциональности в соотношениях между электрическими величинами (напряженностью электрического поля, поляризацией) и механическими величинами (механическое напряжение, деформация). Например, поляризация P , возникающая в пьезоэлектрике под действием механического напряжения T , выражается соотношением

$$P = d T. \quad (5.13)$$

Полная поляризация с учетом электрического поля складывается из поляризации, вызванной механическим напряжением, и поляризации, вызванной электрическим полем:

$$P = d T + \chi E, \quad (5.14)$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость. Коэффициент d – одна из пьезоконстант. Поскольку механические напряжения могут быть представлены в виде шести независимых величин (сжатия и растяжения вдоль трех осей, а также сдвиги в плоскостях, перпендикулярных этим осям), а вектор поляризации имеет три независимые компоненты, то в общем случае может быть 18 разных пьезоконстант. Параметры пьезоэлектриков, характеризующие их электрические и механические свойства, можно найти в соответствующей справочной литературе, например в [4].

Главные оси кристалла носят названия: ось X – электрическая, ось Y – механическая и ось Z – оптическая. Пластика, вырезанная из

кристалла перпендикулярно электрической оси X , называется пластинкой X -среза. Такая пластинка при приложении к ее металлическим электродам механического или электрического напряжения будет испытывать деформации по толщине и соответственно служить приемником или излучателем продольных акустических волн L . Для приема или излучения сдвиговых T -волн используется срез Y . В этом случае пластинка вырезается так, что ее большая поверхность перпендикулярна оси Y .

Наибольшая амплитуда колебаний пьезопластинки будет при резонансе. Например, для продольных волн на толщине l пластинки X -среза должно укладываться нечетное число полуволн $l = n \frac{\lambda}{2}$. Формула для расчета частоты пьезорезонансов пластинки- X имеет вид

$$f = \frac{n V_l}{2 l}. \quad (5.15)$$

Скорость продольных волн для пьезокварца по оси x равна $V_l = 5700$ м/с. Основная частота собственных колебаний пластинки X -среза при толщине $l = 1$ мм будет равна $f \cong 2850$ кГц. Добротность Q для пьезоэлектрической пластинки, совершающей колебания на собственной частоте ($n = 1$) и излучающей акустические волны обеими ее сторонами (двухстороннее излучение), определяется отношением

$$Q = \frac{Z_{\text{пьезопластинки}}}{Z_{\text{среды}}}$$

Здесь $Z_{\text{среды}}$ – акустическое сопротивление среды; $Z_{\text{пьезопластинки}}$ – акустическое сопротивление самой пластинки. Так, для пластинки X -среза $Z_{\text{пьезопластинки}} \cong 1.43 \cdot 10^6$ г/(см²·с), а для воздуха $Z_{\text{среды}} = 41$ г/(см²·с), добротность составит $Q \cong 3 \cdot 10^4$.

Пьезоэлектрический преобразователь представляет собой пластинку пьезоэлектрического кристалла толщиной от четверти до половины длины волны с двумя металлизированными поверхностями.

Существенным фактором, определяющим эффективность работы пьезоэлектрических излучателей, является согласование их со средой и создание однонаправленного излучения. Первое решается использованием четвертьволновых согласующих слоев. Второе – использо-

ванием поглощающего или отражающего слоя с нерабочей стороны устройства (рис.5.6).

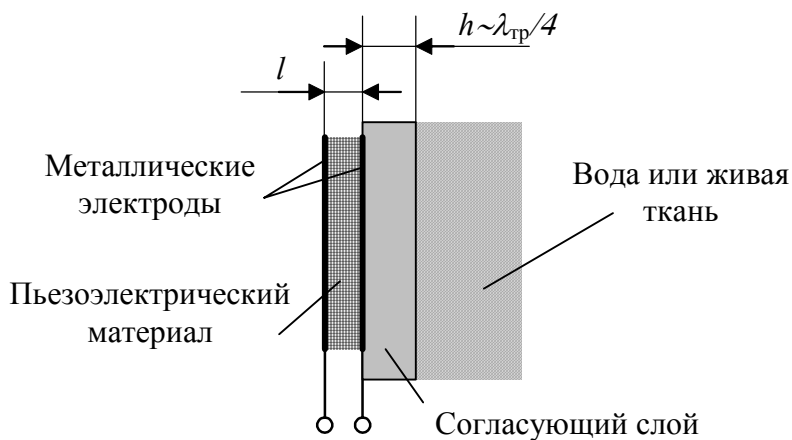


Рис.5.6. Пьезоэлектрический преобразователь для возбуждения акустической волны в воде или живой ткани с воздушной тыльной нагрузкой и согласующим слоем

Два пьезоэлектрических преобразователя, соединенных слоем материала с малыми акустическими потерями, образуют линию задержки. Подобные устройства находят широкое применение в радиоэлектронике. Конструкция линии задержки с пьезоэлектрическим преобразованием на основе продольных акустических волн показана на рис.5.7. На этом рисунке h_1 , h_2 – толщина металлических электродов, l – толщина пьезоматериала.

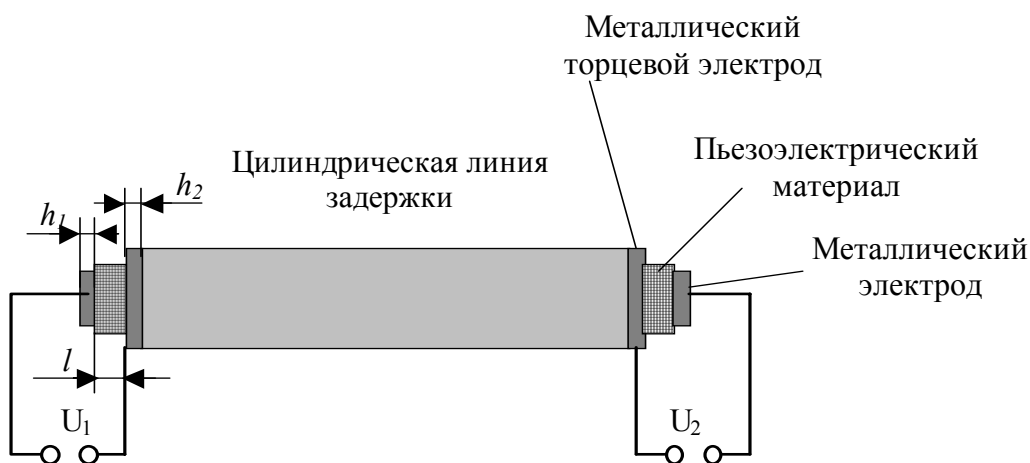


Рис.5.7. СВЧ линия задержки на акустических волнах

Продольные акустические волны распространяются в звукопроводе, например, из алюминия, сапфира или плавленого кварца. На его торцах расположены пленочные электроды, на которые нанесены ионным распылением или вакуумным напылением тонкие слои пьезоэлектрического материала. Толщина этого слоя обычно составляет от четверти до половины длины волны. С другой стороны пьезоэлектрика расположены пленочные электроды. Под действием переменного напряжения сигнала между обкладками конденсатора, образованного двумя плоскими электродами, создается переменное электрическое поле. Оно вызывает соответствующее изменение толщины пьезоэлектрического слоя, которое передается звукопроводу. Образовавшаяся продольная акустическая волна распространяется с известной скоростью вдоль звукопровода. Его длина определяет время задержки устройства. Механическая вибрация торца звукопровода воздействует на пьезоэлектрик. На обкладках второго конденсатора наводится напряжение сигнала с заданным временем запаздывания. Линии задержки рассмотренного типа обеспечивают на частотах до 100 МГц и выше время задержки до 0,1 мс.

5.4. Встречно-стержневые пьезоэлектрические преобразователи

Для возбуждения и приема поверхностных акустических волн используются встречно-стержневые преобразователи. Если среда является пьезоэлектрической, то и электрические поля, связанные с такими волнами, должны возрасти вблизи поверхности. При помощи электродов, нанесенных на поверхность пьезоэлектрического материала, можно сравнительно легко возбуждать и принимать поверхностные волны. Простейший встречно-стержневой преобразователь электрического сигнала в поверхностную волну показан на рис. 5.8.

Два проводника образуют плоский конденсатор на пластинке пьезоэлектрического материала. Под действием источника сигнала между проводниками конденсатора возникает переменное электрическое поле, воздействующее на пьезоэлектрическую подложку. Тем самым создается переменная деформация материала между металлическими электродами. Для повышения эффективности рассмотренного преобразователя используют гребенчатую структуру электродов

(рис.5.9). Аналогично реализуются преобразователи энергии акустической поверхностной волны в электрическую энергию, т.е. рассмотренные устройства являются взаимными.

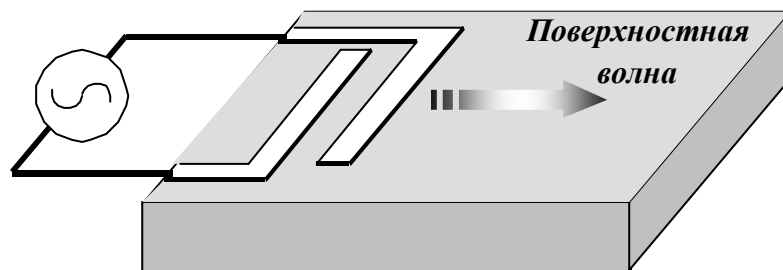


Рис. 5.8. Простейший возбуждатель поверхностной акустической волны

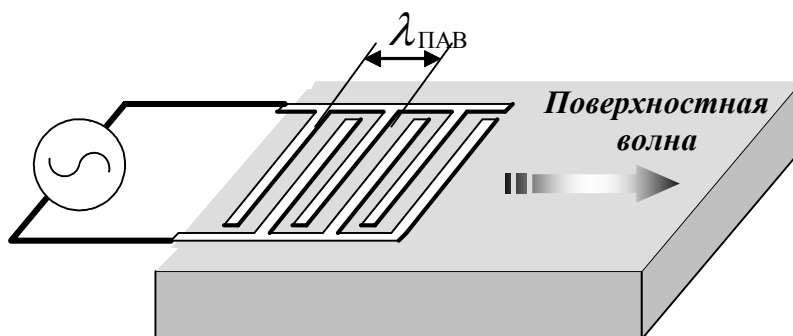


Рис. 5.9. Встречно-стержневой преобразователь

Пространственный шаг штырей (расстояние между соседними одноименными штырями) равен длине волны $S = \lambda_{ПАВ}$. Обычно ширина штырей равна зазору Δ между ними. Если зазор Δ взять минимально реализуемого размера, например $\Delta_{\min} = 0.5$ мкм, то получим максимально реализуемую частоту в зависимости от материала подложки $f_{\max} = 0,75 - 1,5$ ГГц. Допустимая площадь преобразователя ограничивает рабочую частоту снизу $f_{\min} = 1 - 10$ МГц. В преобразователе возбуждаются две волны, направленные в противоположные стороны. Часто полезной является одна волна, распространяющаяся к выходному преобразователю. Другая волна устраняется с помощью поглощающего покрытия.

При пространственном шаге структуры $S = \lambda_{\text{ПАВ}}$ каждая пара электродов возбуждает акустическую волну, при этом волна проходит расстояние между парами за время, равное периоду повторения возбуждающего сигнала, и волна усиливается. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) такого преобразователя имеет максимум на частоте

$$f_0 = \frac{V_{\text{ПАВ}}}{\lambda_{\text{ПАВ}}} = \frac{V_{\text{ПАВ}}}{S} \quad (5.16)$$

Полоса пропускания Δf (на уровне 0,7 от максимума АЧХ) может быть вычислена по формуле

$$\Delta f \approx \frac{2f_0}{N}.$$

Здесь N – число пар стержней. Преобразователь представляет собой частотно-избирательный элемент. Чем больше N , тем уже полоса, тем выше избирательность. Короткий преобразователь может быть использован для возбуждения (или приема) сигнала в более широком частотном диапазоне. Для формирования направленного излучения поверхностной волны вдоль периодической структуры длина стержней (область их взаимного перекрытия) должна составлять не менее нескольких длин поверхностной волны.

Радиоэлектронные устройства, использующие рассмотренные выше преобразователи с поверхностными акустическими волнами, называются ПАВ преобразователями.

Два подобных преобразователя, расположенные на некотором расстоянии друг от друга, позволяют реализовать линию задержки. Акустические линии задержки на поверхностных волнах (ПАВ) эффективно работают на частотах до 1 ГГц. При этом максимальное время задержки сигнала достигает 1 мс. Имеется большое многообразие конструкций устройств на пространственных и поверхностных акустических волнах, информацию о которых можно получить в соответствующей технической литературе.

Если несколько преобразователей расположить на пути распространения акустической волны, то можно построить, например, корреляционный фильтр. Принцип работы корреляционного фильтра заключается в следующем. Параметры ожидаемого цифрового сигнала обычно известны, например некая последовательность нулей и единиц. Единице соответствует интервал времени с возбужденной по-

верхностной волной, нулю – при ее отсутствии. Эта последовательность, подобно железнодорожному составу с пустыми и нагруженными платформами, бежит по поверхности материала. На пути распространения поверхностной волны методами интегральной технологии нанесены пьезоэлектрические акусто-электронные преобразователи. Если закон расположения акусто-электронных преобразователей на пути распространения акустических волн совпадает с законом распределения максимумов амплитуд поверхностных волн (используется логический элемент «и»), на выходе появляется соответствующий сигнал.

Устройства на акустических волнах находят широкое применение в приборах неразрушающего контроля структуры материалов (например, в дефектоскопах), а также в устройствах акустической интроскопии (например, системах ультразвукового исследования (УЗИ) в медицине). Кроме того, они часто используются в высококачественных микрофонах и акустических системах звукового диапазона.

5.5. Задачи для самостоятельного решения

5.1. Вычислить интенсивность сферической волны в воздухе от пульсирующей сферы малого радиуса ($r_0 \ll \lambda$, где r_0 – радиус сферы) на расстоянии 10, 50, 100 и 500 м, если излучаемая мощность составляет 5 Вт.

5.2. Определить полную мощность излучения звука пульсирующей сферой радиусом 1 см, совершающей колебания с амплитудой 1 мм на частоте 100 Гц: а) в воздухе; б) в воде.

5.3. Вычислить расстояние между стержнями планарного электроакустического преобразователя, если рабочая частота равна 30 МГц. Подложка выполнена из ниобата лития. Скорость распространения поверхностной волны Рэлея в ниобате лития равна 3,3 км/с.

Глава 6. Элементы акустики звукового диапазона

6.1. Строение слухового аппарата человека

Акустические волны звукового диапазона существенно расширяют информационные возможности человека, позволяют ориентироваться ему в пространстве. Предлагаемый вниманию раздел содержит основные сведения о свойствах слуха человека.

Особенности строения уха и свойства слуха человека имеют большое значение для рационального проектирования и эксплуатации звукозаписывающей и звуковоспроизводящей аппаратуры. Соответствие технических средств звукопередачи и субъективных характеристик восприятия помогает достигнуть нужной информационной достоверности передаваемых сигналов, получить в процессе прослушивания семантическое и эмоциональное соответствие между первичными и воспринимаемыми звуковыми образами.

Ухо человека обладает свойствами частотного анализа, дискретного восприятия по частотному и динамическому диапазонам. Таким образом, аналоговый звуковой сигнал представляется последовательностью электрических импульсов, вырабатываемых нервными окончаниями волокон основной мембраны уха. Строение человеческого уха показано на рис.6.1.

Ушная раковина 1 в области наружного уха направляет акустические колебания в слуховой проход 2, заканчивающийся барабанной перепонкой 3. В слуховом проходе, как в звуковом резонаторе, настроенном на частоту 3 кГц, происходит примерно 3-кратное усиление звукового давления, действующего далее на барабанную перепонку. Барабанная перепонка образует границу с областью среднего уха и соединена с костно-мышечным механизмом в виде молоточка 4 и наковаленки 5. Мышечная ткань ножки наковаленки опирается на входной элемент внутреннего уха - мембрану овального окна 6 внутреннего уха 7. Рычажная система молоток - наковаленка играет роль акустического трансформатора колебаний барабанной перепонки, повышая звуковое давление на мембране овального окна 6 для наибольшей отдачи энергии из воздушной среды среднего уха, сообщаемого с носоглоткой через проход 8, в область внутреннего уха 7, заполненную несжимаемой жидкостью - лимфой. Структура внутреннего уха представляет собой сужающуюся к вершине трубку, свернутую в 2,5 витка в виде улитки, к которой примыкают каналы

вестибулярного аппарата в виде трех колец. Весь лабиринт ограничен костной перегородкой. По всей длине улитки располагается основная мембрана - анализатор акустического сигнала. Она представляет собой узкую ленту из гибких связок, расширяющуюся к вершине улитки.

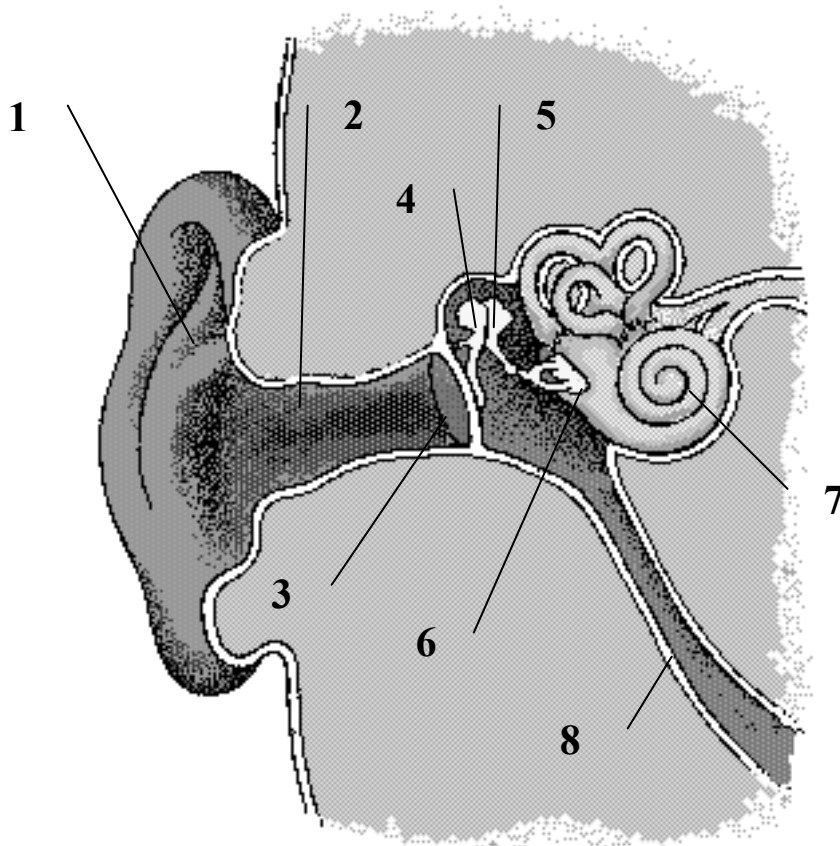


Рис. 6.1. Строение человеческого уха

При колебаниях мембраны овального окна внутреннего уха в жидкости внутреннего уха возникают упругие колебания, перемещающиеся вдоль основной мембраны от основания к вершине. Структура основной мембраны аналогична системе акустических резонаторов с изменяющейся резонансной частотой. На рис.6.2 показана развертка основной мембраны со шкалой резонансных частот соответствующих участков.



Рис.6.2. Положение резонансных зон на развертке основной мембраны

Участки основной мембраны, расположенные вблизи основания улитки, резонируют на высокочастотные составляющие спектра звукового сигнала, заставляя их колебаться. Средняя часть реагирует на средние частоты звукового диапазона. Участки, расположенные вблизи вершины, возбуждаются низкими частотами.

Нервные клетки расположены в основной мембране в несколько слоев и образуют орган Корти. Резонансные явления в основной мембране возбуждают окончания нервных клеток. Всего таких окончаний насчитывается около 25 тысяч. Электрический сигнал от нервных окончаний поступает в головной мозг, и человек воспринимает звуковое колебание соответствующей частоты. Пространственный разнос резонаторов основной мембраны позволяет одновременно воспринимать несколько частот.

6.2. Свойства слуха

Гармоническое колебание определенной звуковой частоты в восприятии характеризуется понятием «тон». Разрешающая способность различения слухом соседних частот неодинакова. На низких частотах (ниже 500 Гц) человек начинает ощущать разницу тона при 1%-ном изменении частоты, в области высоких частот – около 0,5%. Самая высокая разрешающая способность человеческого уха (0,2–0,3%) имеет место на средних частотах. Эта разрешающая способность наблюдается при сравнении двух поочередно воспроизводимых звуков. Если же изменение частоты происходит медленно, то разрешающая способность человеческого уха составляет 2–4%. Таким образом,

можно считать, что весь слышимый диапазон частот человеческое ухо дискретизирует на 2–3 сотни градаций.

Силу звука человек ощущает в очень широком диапазоне звуковых давлений. Пока волокно основной мембраны при своих колебаниях не доходит до нервных окончаний - человек звук не слышит. При превышении уровня звукового давления некоторой пороговой величины человек начинает воспринимать соответствующий звук. Снизу динамический диапазон воспринимаемого звука ограничен стандартным порогом слышимости. Под ним условились понимать эффективное значение звукового давления, создаваемого гармоническим звуковым колебанием частоты 1000 Гц, едва слышимое человеком со средней чувствительностью слуха. Стандартный порог слышимости составляет $2 \cdot 10^{-5}$ Па. Верхний предел слышимости, при котором возникает болевое ощущение, определяется звуковым давлением 20 Па. Таким образом, весь динамический диапазон на частоте 1000 Гц составляет 10^6 раз, или 120 дБ. Порог слышимости различен на разных частотах. Он уменьшается в области низких и высоких частот (рис.6.3).

Порог различимости силы звука вблизи порога слышимости составляет 2–3 дБ, а в области средних уровней громкости – около 0,4 дБ. Таким образом осуществляется принцип квантования ощущения уровня звука. Общая дискретность восприятия слуха по частоте и амплитуде звукового сигнала составляет около 22000 элементарных градаций в диапазоне уровней от порога слышимости до болевого ощущения в диапазоне частот от 20 Гц до 20кГц.

Уровень громкости принято оценивать в фонах. При его оценке используют метод сравнения уровня сигнала заданной частоты с эталоном, в качестве которого выбран тон частотой 1000 Гц. При равном восприятии громкости уровень громкости в фонах совпадает с уровнем тона частотой 1000 Гц в децибелах относительно порога слышимости. Частота эталонного сигнала выбрана потому, что на этой частоте человеческое ухо наиболее чувствительно и диапазон воспринимаемых градаций громкости максимален (рис.6.3). Нормальное ухо слышит только звуки, характеристики которых лежат внутри указанной области. Для профессионального прослушивания предпочтителен уровень громкости 85–95 фон. С его понижением сужается воспринимаемый слушателем диапазон частот. Это явление наиболее заметно в области низких частот звукового диапазона, где чувствительность слуха к восприятию спектральных составляющих существенно

ухудшается. Представление об уровнях громкости реальных источников дают данные приведенной ниже таблицы.

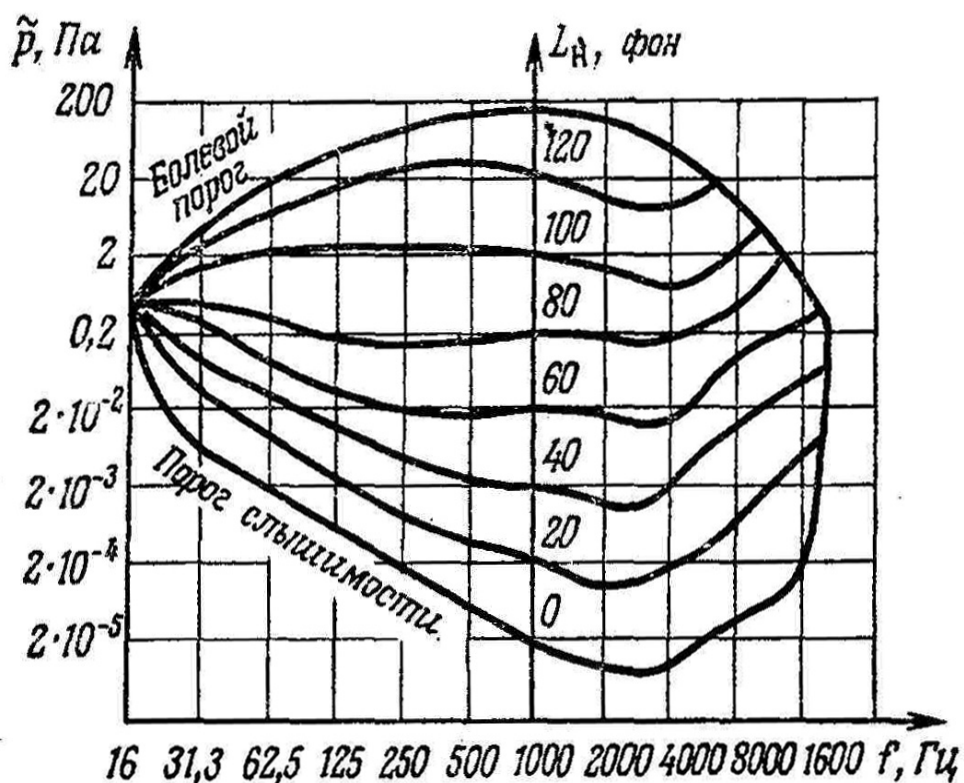


Рис.6.3. Диаграмма частот и интенсивностей звука, воспринимаемых человеческим ухом (диаграмма слуха)

Примерный уровень громкости звука различных источников

Источник звука	Уровень громкости, фон
Шум в студии звукового вещания	Не более 20...25
Библиотека, театральный зал	25...40
Разговорная речь на расстоянии 1 м	50...60
Выступление оратора на расстоянии 1 м	70...80
Громкое звучание симфонического оркестра	До 110
Звук, соответствующий болевому пределу	120...130

Введем понятие абсолютный акустический уровень, дБ,

$$N_a = 20 \lg(P_{зв}/P_{зв0}) ,$$

где $P_{зв}$ – звуковое давление, воздействующее на ухо человека, Па;

$P_{зв0} = 2 \cdot 10^{-5}$ – порог слышимости, Па.

Человек в слышимом частотном диапазоне воспринимает уровень громкости при постоянном акустическом давлении неодинаково. Соответственно субъективная оценка уровня постоянной громкости происходит при различной величине акустического давления. Это необходимо учитывать при проектировании высококачественной звуковоспроизводящей аппаратуры. На рис.6.4 показаны кривые равной громкости – изофоны. Самая нижняя кривая, соответствующая порогу слышимости, определяется величиной 0 фон. На этом рисунке $I_{зв}$ – плотность потока мощности акустической волны.

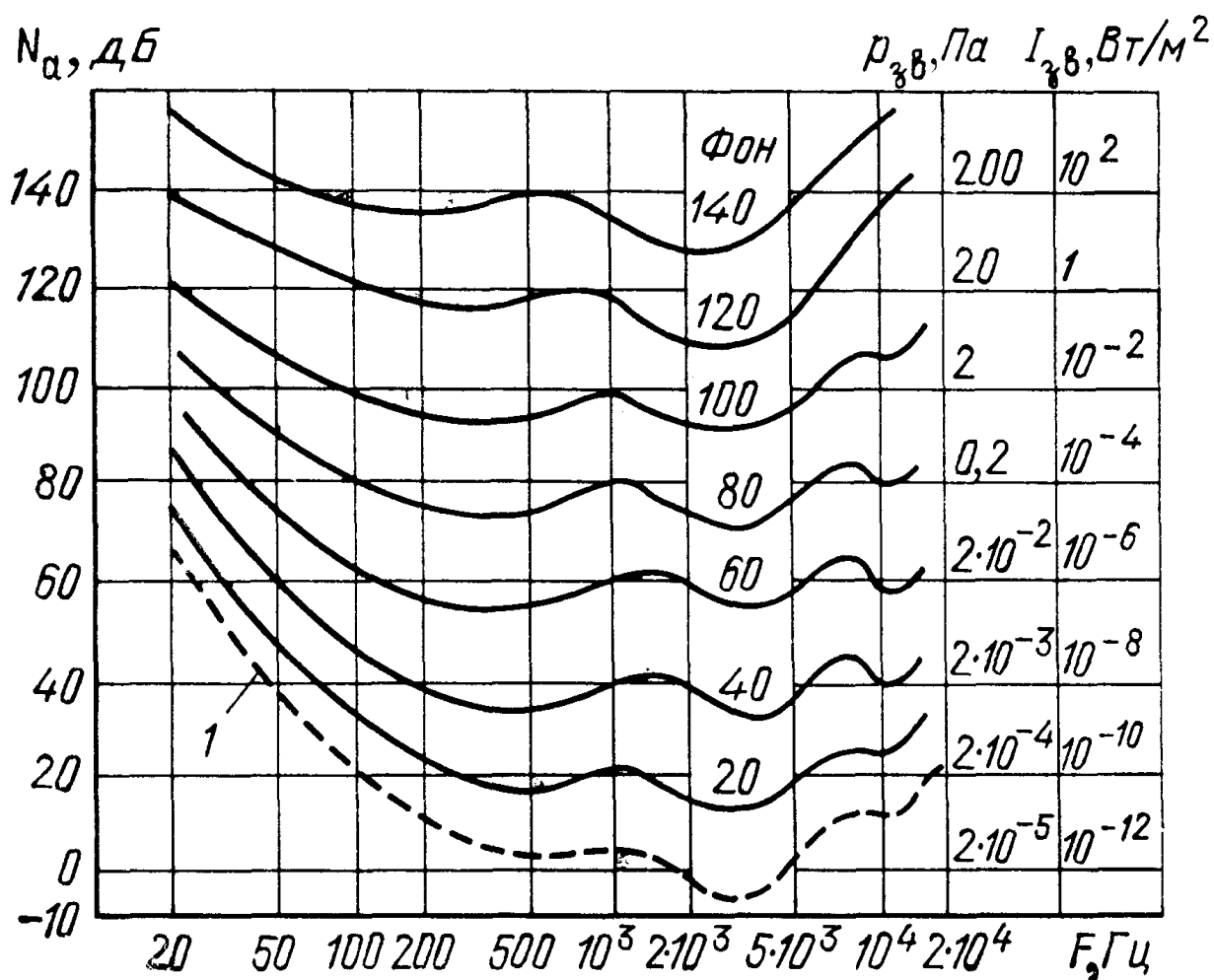


Рис.6.4. Кривые равной громкости (изофоны) человеческого уха

Наличие постороннего источника звука или шума изменяет ход зависимости, показанной на рис.6.4. Наблюдается эффект маскировки полезного сигнала, т.е. вблизи частоты мешающего источника звука существенно повышается порог слышимости. При существенном уровне помехи полезный сигнал может быть совсем не слышен. Явление маскировки проявляется по-разному для различных уровней мешающего сигнала и его спектральных характеристик. Резонансные характеристики слухового резонатора несимметричны. Со стороны высоких частот спад резонансной кривой более пологий. Эта особенность слуха проявляется в том, что в смешанном хоре мужских голосов обычно меньше чем женских, но, не смотря на это, их очень даже хорошо слышно.

Следует отметить, что при совпадении частот полезного сигнала и помехи порог чувствительности человеческого уха примерно на 4–5 дБ меньше, чем уровень помехи. Полезный сигнал слышен даже при некотором превышении его помехой.

Нелинейные свойства слуха проявляются в том, что при достаточно большом уровне одночастотного тона ухо человека начинает воспринимать его вторую, третью гармонику и далее. При прослушивании двух тонов человек слышит суммарную и разностную частоты. Экспериментально это явление можно подтвердить по биениям фантомных звуков и вспомогательного пилот-сигнала.

Слуховой аппарат обладает определенной инерционностью. Время, в течение которого человек ощущает изменение уровня звукового сигнала на 10 фон, называемое постоянной времени слуха, составляет 150–200 мс. Время адаптации слуха при оценке высоты тона на низких частотах составляет 30 мс, на высоких немного меньше.

Определить направление, с которого распространяется звук, человек может благодаря так называемому бинауральному эффекту. Локализация источника осуществляется по уровню и запаздыванию звукового сигнала, приходящего в каждое ухо. Первое преобладает на средних и высоких частотах, второе – на низких. На частотах ниже 150 Гц локализация источника практически невозможна. Это допускает применение лишь одного излучателя низких частот в системах звуковоспроизведения. Достаточно одной акустической системы – саббуфера, чтобы в полной мере ощутить все краски музыкального произведения.

Отмеченные особенности звукового восприятия человека необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации соответствующей электроакустической радиоаппаратуры.

6.3. Задачи для самостоятельного решения

6.1. Уровень интенсивности звука составляет $L = 120$ дБ (очень громкий звук). Найти звуковое давление и мощность, попадающую в ухо человека. Считать, что площадь уха равна 4 см^2 и оно расположено перпендикулярно направлению распространения волны. Скорость звуковой волны равна 340 м/с . Плотность воздуха $\rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3$.

6.2. Насколько большую мощность должна излучать акустическая система на частоте 20 Гц , чтобы уровень воспринимаемого человеком сигнала был сравним по громкости с сигналом на частоте 1 кГц ? Акустическое давление, создаваемое акустической системой на частоте 1 кГц , составляет $2 \cdot 10^{-3} \text{ Па}$.

Глава 7. Решение контрольных задач

7.1. Ответы и решения задач, приведенных в главе 2

Задача 2.1

Скорость акустической волны в воздухе

$$V_l = \sqrt{\gamma RT}, \quad (1)$$

где γ - показатель адиабаты, из Прил.2 для воздуха $\gamma = 1,4$;

R – универсальная газовая постоянная, значение которой для воздуха приведено в Прил.2, и составляет $R = 287$ Дж/(кг·К);

T – температура в кельвинах.

Из формулы (1) находим температуру $T = \frac{V_l^2}{\gamma R}$

Скорость звука увеличится на треть: $V_1 = \frac{4}{3}V_0$,

где V_0 – скорость звука при $t = 0^\circ\text{C}$, м/с. Вычислим эту скорость:

$$V_1 = \frac{4}{3}V_0 = \frac{4}{3} \cdot 330 = 440 \text{ м/с.}$$

Температура воздуха в кельвинах для такой скорости распространения звука

$$T = \frac{440^2}{1,4 \cdot 287} = 481,8 \text{ K},$$

или в градусах Цельсия

$$t_1 = T - 273 = 481,8 - 273 = 209^\circ\text{C}.$$

Скорость звука станет на треть меньше: $V_2 = \frac{2}{3}V_0 = \frac{2 \cdot 330}{3} = 220$

м/с.

Температура воздуха в кельвинах для такой скорости распространения звука

$$T = \frac{220^2}{1,4 \cdot 287} = 120,5 \text{ K},$$

или $t_2 = T - 273 = 120,5 - 273 = -152,5^0 C$.

Ответ. Скорость звука увеличивается на треть при температуре $+209^0 C$ и уменьшается на треть при температуре $-152,5^0 C$.

Задача 2.2

Скорость самолета равна скорости звука. Рассчитаем скорость звука по формуле

$$V_l = V_0 \sqrt{1 + \frac{t}{273}},$$

где V_0 – скорость звука при $t = 0^0 C$, м/с, где t – температура, в $^0 C$.

Скорость звука при $t = -50^0 C$

$$V_1 = 331,6 \cdot \sqrt{1 + \frac{-50}{273}} = 299,7 \text{ м/с} = 1078,9 \text{ км/ч}.$$

Скорость звука при $t = 0^0 C$

$$V_2 = 331,6 \cdot \sqrt{1 + \frac{0}{273}} = 331,6 \text{ м/с} = 1193,8 \text{ км/ч}.$$

Ответ. Скорость звука при температуре $-50^0 C$ равна 1079 км/ч, при температуре $0^0 C$ – 1194 км/ч. Скорость звука в газообразных средах не зависит от давления, а зависит только от температуры.

Задача 2.3

Длина волны рассчитывается по формуле

$$\lambda = \frac{V_l}{f},$$

(1)

где V_l – скорость звука, м/с; f – частота, Гц.

Скорость звука

$$V_l = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}, \quad (2)$$

где γ - показатель адиабаты, для воздуха $\gamma = 1,4$; p_0 – давление воздуха, Па; ρ_0 – плотность воздуха, кг/м³.

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\lambda = \frac{\sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}}{f}.$$

Подставляем численные значения

$$\lambda = \frac{\sqrt{1,4 \cdot 10^5 / 1,26}}{500} = 0,67 \text{ м.}$$

Ответ. Длина волны в воздухе на частоте 500 Гц составляет 0,67 м.

Задача 2.4

Из данного выражения $u = 5 \cdot 10^{-8} \sin(1980t - 6x)$, м, видно:

- 1) что угловая частота $\omega = 1980 \text{ с}^{-1}$;
- 2) волновое число $k = 6 \text{ м}^{-1}$;
- 3) амплитуда смещения $u_0 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ м}$.

Следовательно, можно найти частоту колебаний

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1980}{2 \cdot 3,14} = 315,3 \text{ Гц,}$$

вычислить скорость распространения волны

$$V_l = \frac{\omega}{k} = \frac{1980}{6} = 330 \text{ м/с,}$$

длину волны

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{6} = 1,05 \text{ м.}$$

Амплитуда колебательной скорости каждой частицы

$$v_m = u_0 \omega = 5 \cdot 10^{-8} \cdot 1980 = 9,9 \cdot 10^{-5} \text{ м/с.}$$

Амплитуда звукового давления

$$P_{am} = v_m Z_a = 9,9 \cdot 10^{-5} \cdot 420 = 0,04 \text{ Па.}$$

Ответ. Из анализа приведенного выражения следует, что частота колебаний равна 315 Гц, скорость распространения акустической волны 330 м/с, длина волны 1,05 м, амплитуда колебательной скорости частиц среды $9,9 \cdot 10^{-5}$ м/с, амплитуда акустического давления 0,04 Па.

Задача 2.5

Амплитуда скорости частиц связана с акустическим давлением через акустический импеданс среды, в данном случае воздуха:

$$v_m = \frac{P_{am}}{Z_a} = \frac{P_{am}}{\rho_0 V_l},$$

где P_{am} - амплитуда акустического давления, Па;

произведение $Z_a = \rho_0 V_l = 420 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$ – акустическое сопротивление для воздуха, тогда амплитуда колебательной скорости

$$v_m = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{420} = 4,76 \cdot 10^{-8} \text{ м/с.}$$

Амплитуда смещения частиц

$$u_0 = \frac{v_m}{\omega} = \frac{v_m}{2\pi f} = \frac{4,76 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 3,14} = 7,6 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Ответ. Амплитуда колебательной скорости частиц среды составляет $4,76 \cdot 10^{-8}$ м/с, амплитуда смещения частиц равна $7,6 \cdot 10^{-12}$ м.

Задача 2.6

Амплитуда смещения частиц среды в воде и воздухе связана с их колебательной скоростью и частотой

$$u_0 = \frac{v_m}{\omega} = \frac{v_m}{2\pi f},$$

где v_m – амплитуда колебательной скорости, м/с; f – частота, Гц;

$$u_0 = \frac{0,05 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 3,14 \cdot 100} = 8 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Амплитуда давления

$$p_{am} = v_m (\rho_0 V_l),$$

где v_m – амплитуда колебательной скорости, м/с; произведение $Z_a = \rho_0 V_l$ – акустическое сопротивление, которое для воздуха

$$Z_{a_{\text{воздуха}}} = \rho_0 \cdot V_l = 420 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}),$$

тогда

$$p_{am_{\text{воздуха}}} = v_m Z_{a_{\text{воздуха}}}$$

Амплитуда акустического давления волны в воздухе

$$p_{am_{\text{воздуха}}} = 0,05 \cdot 10^{-5} \cdot 420 = 2,1 \cdot 10^{-4}, \text{ Па}$$

Скорость распространения акустической волны в воде

$$V_l = \sqrt{\frac{1}{\chi \rho_0}},$$

где χ – коэффициент сжимаемости воды; ρ_0 – плотность воды.

Из Прил.1 для воды: $\chi = 0,47 \text{ 1/ГПа}$, $\rho_0 = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$.

$$V_l = \sqrt{\frac{1}{0,47 \cdot 10^{-9} \cdot 10^3}} = 1458 \text{ м/с},$$

волновое сопротивление для воды

$$Z_{a_{\text{воды}}} = (\rho_0 V_l)_{\text{воды}} = 10^3 \cdot 1458 = 1,458 \cdot 10^6 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}.$$

Амплитуда акустического давления волны в воде

$$p_{am_{\text{воды}}} = 0,05 \cdot 10^{-5} \cdot 1,458 \cdot 10^6 = 0,73 \text{ Па}.$$

Ответ. На частоте 100 Гц при равной амплитуде колебательной скорости для воды амплитуда смещения частиц среды составила $8 \cdot 10^{-10}$ м, акустическое давление $2,1 \cdot 10^{-4}$ Па; для воздуха амплитуда смещения частиц среды составила бы также $8 \cdot 10^{-10}$ м, а акустическое давление увеличилось бы до 0,73 Па.

Задача 2.7

Амплитуда колебательной скорости

$$v_m = \frac{p_{am}}{Z_a} = \frac{p_{am}}{\rho_0 V_l},$$

где p_{am} – амплитуда звукового давления, Па; $Z_a = \rho_0 V_l$ – акустическое сопротивление среды, кг/(см² · с);

$$v_m = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{420} = 4,76 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}.$$

Амплитуда смещения

$$u_0 = \frac{v_m}{\omega} = \frac{v_m}{2\pi f},$$

где f – частота, Гц;

$$u_0 = \frac{4,76 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^3} = 7,58 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

Интенсивность волны (средняя плотность потока энергии)

$$J = \frac{p_{am}^2}{2\rho_0 V_l} = \frac{(2 \cdot 10^{-4})^2}{2 \cdot 420} = 4,8 \cdot 10^{-11} \text{ Вт/м}^2.$$

Удельная плотность энергии волны w

$$w_k = w_n = \frac{J}{V_l} = \frac{4,8 \cdot 10^{-11}}{331} = 1,45 \cdot 10^{-13} \text{ Дж/м}^3,$$

где V_l - скорость звука, м/с.

Ответ. Амплитуда колебательной скорости частиц среды составляет $4,76 \cdot 10^{-7}$ м/с, амплитуда смещения частиц среды $7,6 \cdot 10^{-11}$ м, средняя интенсивность волны $4,8 \cdot 10^{-11}$ Вт/м², удельная плотность энергии акустической волны равна $1,45 \cdot 10^{-13}$ Дж/м³.

Задача 2.8

В воде объёмная плотность энергии

$$w = \frac{J}{V_l},$$

где J - интенсивность акустической волны, Вт/м², V_l - скорость распространения акустической волны, м/с;

$$w = \frac{0,1}{1500} = 6,7 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м}^3.$$

Амплитуда акустического давления

$$p_{am} = \sqrt{2J\rho_0 V_l} = \sqrt{2 \cdot 0,1 \cdot 10^3 \cdot 1500} = 548 \text{ Па.}$$

Амплитуда колебательной скорости

$$v_m = \frac{P_{am}}{\rho_0 V_l} = \frac{548}{10^3 \cdot 1500} = 3,65 \cdot 10^{-4} \text{ м/с.}$$

Амплитуда смещения частиц среды

$$u_0 = \frac{v_m}{\omega} = \frac{v_m}{2\pi f} = \frac{3,65 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^4} = 5,8 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

В воздухе объёмная плотность энергии

$$w = \frac{0,1}{340} = 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ Дж/м}^3.$$

Амплитуда акустического давления

$$P_{am} = \sqrt{2 \cdot 0,1 \cdot 1,29 \cdot 340} = 9,4 \text{ Па.}$$

Амплитуда смещения частиц среды

$$u_0 = \frac{9,4}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^4 \cdot 1,29 \cdot 340} = 3,4 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Амплитуда колебательной скорости

$$v_m = \frac{9,4}{1,29 \cdot 340} = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ м/с.}$$

Ответ. Для воды удельная плотность энергии составляет $6,7 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м}^3$, акустическое давление 548 Па, амплитуда смещения частиц среды $5,8 \cdot 10^{-9} \text{ м}$, амплитуда колебательной скорости частиц среды $3,7 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$; для воздуха при той же плотности потока мощности акустической волны удельная плотность энергии составляет $2,9 \cdot 10^{-4} \text{ Дж/м}^3$, акустическое давление 9,4 Па, амплитуда смещения частиц среды $3,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, амплитуда колебательной скорости частиц среды $2,1 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$.

Задача 2.9

Уровень интенсивности звука относительно стандартного уровня

$$L = 10 \cdot \lg \frac{J}{J_{cm}},$$

где J – интенсивность звука, Вт/м²; J_{cm} – интенсивность относительно стандартного нулевого уровня, Вт/м²;

$$L = 10 \cdot \lg \frac{2 \cdot 10^{-4}}{10^{-12}} = 83 \text{ дБ.}$$

Ответ. Относительно стандартного уровень заданной интенсивности звука составляет 83 дБ.

Задача 2.10

Уровень интенсивности относительно стандартного уровня

$$L = 10 \cdot \lg \frac{J}{J_{cm}},$$

где J – интенсивность звука, Вт/м²; J_{cm} – интенсивность относительно стандартного нулевого уровня, Вт/м², соответствующего порогу слышимости;

$$\lg \frac{J}{J_{cm}} = \frac{L}{10},$$

$$J = J_{cm} \cdot 10^{\frac{L}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{100}{10}} = 10^{-2} \text{ Вт/м}^2.$$

Амплитуда колебательной скорости

$$v_m = \sqrt{\frac{2J}{Z_a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,01}{420}} = 6,9 \cdot 10^{-3} \text{ м/с.}$$

Ответ. Амплитуда колебательной скорости частиц среды равна $6,9 \cdot 10^{-3}$ м/с.

Задача 2.11

Коэффициент затухания плоской акустической волны, распространяющейся в воде, вычисляется по формуле, м^{-1} ,

$$\alpha_{\text{воды}} = \frac{(2\pi f)^2}{2\rho_{\text{воды}} V_l^3} \cdot \frac{4}{3} \eta_{\text{воды}},$$

где $\rho_{\text{воды}}$ - удельная плотность воды; V_l - скорость распространения звуковой волны в воде; $\eta_{\text{воды}}$ - коэффициент вязкости воды (Прил.2).

$$V_l = \sqrt{\frac{1}{\chi\rho_0}} = \sqrt{\frac{1}{0,47 \cdot 10^{-9} \cdot 10^3}} = 1458 \text{ м/с},$$

$$\alpha_{\text{воды}} = \frac{(2 \cdot 3,14 \cdot 500 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 10^3 \cdot 1458^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}.$$

Амплитуда акустической волны, бегущей, например, вдоль оси z , изменяется с пройденным расстоянием по формуле

$$p_a(z) = p_{\text{ам}} e^{-\alpha_{\text{воды}} z}.$$

Амплитуда волны на искомом расстоянии уменьшается в 10 раз, следовательно, принимая за начальное сечение точку $z=0$, можно записать

$$\frac{p_a(z)}{p_{\text{ам}}} = 0,1,$$

откуда искомое расстояние

$$z = -\frac{1}{\alpha_{\text{воды}}} \ln \frac{p_a(z)}{p_{\text{ам}}} = -\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \ln 0,1 = 1151 \text{ м}.$$

Ответ. Амплитуда акустической волны частотой 500 кГц при распространении в воде уменьшится в 10 раз на расстоянии 1,15 км.

Задача 2.12

Интенсивность звука плоской волны в воздухе вследствие поглощения имеет вид

$$J_{\text{возд}} = J_0 e^{-2\alpha_{\text{возд}} l_{\text{возд}}}.$$

Интенсивность плоской акустической волны в воде вследствие поглощения примет вид

$$J_{\text{воды}} = J_0 e^{-2\alpha_{\text{воды}} l_{\text{воды}}}.$$

Одинаковое уменьшение интенсивности в воздухе и воде происходит за счет разных расстояний, тогда можем приравнять экспоненты, уменьшающие интенсивность:

$$e^{-2\alpha_{\text{возд}} l_{\text{возд}}} = e^{-2\alpha_{\text{воды}} l_{\text{воды}}},$$

следовательно,

$$-2\alpha_{\text{возд}} l_{\text{возд}} = -2\alpha_{\text{воды}} l_{\text{воды}},$$

$$l_{\text{воды}} = \frac{\alpha_{\text{возд}}}{\alpha_{\text{воды}}} l_{\text{возд}}.$$

Затухание воздуха

$$\alpha_{\text{возд}} = \frac{(2\pi f)^2}{2\rho_{0\text{возд}} V l_{\text{возд}}^3} \cdot \frac{4}{3} \eta_{\text{возд}}.$$

Затухание воды

$$\alpha_{\text{воды}} = \frac{(2\pi f)^2}{2\rho_{0\text{воды}} V l_{\text{воды}}^3} \cdot \frac{4}{3} \eta_{\text{воды}},$$

$$\begin{aligned} l_{\text{воды}} &= \frac{(2\pi f)^2}{2\rho_{0\text{возд}} V l_{\text{возд}}^3} \cdot \frac{4}{3} \eta_{\text{возд}} \frac{2\rho_{0\text{воды}} V l_{\text{воды}}^3}{(2\pi f)^2} \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{\eta_{\text{воды}}} l_{\text{возд}} = \\ &= \frac{\rho_{0\text{воды}} V a_{\text{воды}}^3}{\rho_{0\text{возд}} V a_{\text{возд}}^3} \frac{\eta_{\text{возд}}}{\eta_{\text{воды}}} l_{\text{возд}}, \end{aligned}$$

$$l_{\text{воды}} = \frac{1000 \cdot 1500^3}{1,3 \cdot 330^3} \cdot \frac{0,19 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} l_{\text{возд}} = 1372,59 l_{\text{возд}}.$$

Ответ. Поскольку коэффициент затухания акустической волны в воздухе больше, чем в воде, то расстояние равного уменьшения амплитуды звука в воде будет в 1372,6 раза больше, чем в воздухе.

Задача 2.13

Коэффициент затухания звука определяется

$$\alpha_{\text{воды}} = \frac{(2\pi f)^2}{2\rho_{0\text{воды}} V_l^3 \text{ воды}} \cdot \frac{4}{3} \eta_{\text{воды}},$$

где f – частота, Гц; ρ_0 – плотность, кг/м³; V_l – скорость распространения акустической волны, м/с; η – вязкость, Па·с. Для воды из Прил.2 вязкость $\eta = 10^{-3}$ Па·с.

$$\alpha = \frac{(2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^6)^2}{2 \cdot 1000 \cdot (1500)^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.$$

Ослабление амплитуды поля акустической волны, например амплитуды акустического давления, на расстоянии r рассчитывается по формуле

$p_a(r) = p_{am} e^{-\alpha r}$, поэтому на расстоянии r относительное изменение амплитуды поля может быть определено как

$$L = \frac{p_a(r)}{p_{am}} = e^{-\alpha \cdot r} = e^{-3,116 \cdot 10^{-4} \cdot 100} = 0,05,$$

$$L[\text{дБ}] = 20 \lg L = 20 \lg 0,05 = -26 \text{ дБ}.$$

Ответ. На расстоянии 100 м амплитуда акустической волны частотой 2 МГц уменьшится в воде на 26 дБ.

7.2. Ответы и решения задач, приведенных в главе 3

Задача 3.1

Коэффициент отражения звука, падающего из воздуха на поверхность воды равен

$$R_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1},$$

где Z_1 , Z_2 – акустическое сопротивление первой (воздуха) и второй (воды) сред, которые могут быть определены из формулы, кг/(м²·с),

$$Z_a = \rho_0 V_l ,$$

где ρ_0 – удельная плотность среды, кг/м³; V_l – скорость распространения акустической волны в данной среде, м/с.

Тогда, полагая, что скорость звука в воздухе равна 340 м/с, а в воде 1480 м/с, получим

$$Z_{a \text{ воздуха}} = \rho_0 V_l = 1,29 \cdot 340 = 439 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}),$$

$$Z_{a \text{ воды}} = \rho_0 V_l = 10^3 \cdot 1480 = 1,48 \cdot 10^6 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Коэффициент отражения при падении волны из воздуха в воду

$$R_p = \frac{1,48 \cdot 10^6 - 439}{1,48 \cdot 10^6 + 439} = 0,9994 ,$$

т.е. давление на границе оказывается удвоенным по сравнению с давлением в падающей волне. Коэффициент отражения при падении акустической волны из воды в воздух равен $R_p = -0,9994$.

Коэффициент передачи энергии (3.13)

$$T_J = 1 - |R_p|^2 = 1 - 0,9994^2 = 0,0012 .$$

Ответ. Коэффициент отражения при нормальном падении акустической волны из воздуха в воду равен 0,9994, при падении из воды в воздух коэффициент отражения составляет –0,9994. Коэффициент передачи энергии равен 0,0012 независимо от направления распространения волны.

Задача 3.2

Коэффициент отражения по акустическому давлению

$$R_p = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1},$$

по колебательной скорости

$$R_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_2 + Z_1},$$

где Z_1 – акустическое сопротивление воздуха; Z_2 – акустическое сопротивление углекислоты;

$$R_p = \frac{510 - 420}{510 + 420} = 0,1,$$

$$R_v = \frac{420 - 510}{510 + 420} = -0,1.$$

Коэффициент прохождения

$$T_p = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2 \cdot 510}{510 + 420} = 1,1.$$

Полученное значение коэффициента прохождения по акустическому давлению (больше единицы) свидетельствует о том, что акустическое давление прошедшей волны больше акустического давления падающей волны. Это не означает, что интенсивность прошедшей волны больше интенсивности падающей волны, так как колебательная скорость частиц во второй среде меньше. Действительно, коэффициент передачи по колебательной скорости

$$T_v = \frac{v_{np}}{v_{над}} = \frac{2 \cdot Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{2 \cdot 420}{510 + 420} = 0,9.$$

Отношение амплитуд суммарного поля по акустическому давлению падающей и отраженной волн в воздухе в точках минимума и максимума может быть определено по формуле

$$d = \frac{1 + R_p}{1 - R_p} = \frac{1 + 0,1}{1 - 0,1} = 1,2.$$

Ответ. Коэффициент отражения на границе раздела воздуха и углекислоты по акустическому давлению равен 0,1, по колебательной скорости составляет $-0,1$. Амплитуда прошедшей волны по акустическому давлению в 1,1 раза больше. Амплитуда прошедшей волны по колебательной скорости составляет 0,9 от амплитуды падающей волны. Амплитуда суммарного поля в воздухе в точках максимума в 1,2 раза больше, чем в точках минимума.

Задача 3.3

Наилучшую звуковую прозрачность обеспечивает слой вещества с минимальной толщиной в четверть длины волны, рассчитанной для материала слоя, $l_{mp} = \frac{\lambda_{mp}}{4}$, т.е. четвертьволновый трансформатор. Акустическое сопротивление материала трансформирующего слоя должно удовлетворять условию

$$Z_{mp} = \sqrt{Z_1 \cdot Z_2},$$

где Z_1 и Z_2 - акустическое сопротивление материала слева и справа от трансформирующего слоя.

Акустическое сопротивление воздуха вычисляется с использованием удельной плотности (см. Прил. 2) и скорости распространения звуковой волны в нем. Пусть эта скорость равно 340 м/с, тогда

$$Z_{a \text{ воздуха}} = \rho_0 V_l = 1,29 \cdot 340 = 439 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Акустическое сопротивление воды с учетом, что скорость распространения звуковой волны в ней равна 1500 м/с, составит

$$Z_{a \text{ воды}} = \rho_0 V_l = 10^3 \cdot 1500 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Акустическое сопротивление трансформирующего слоя должно быть

$$Z_{mp} = \sqrt{439 \cdot 1,5 \cdot 10^6} = 2,7 \cdot 10^4 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

В реальных условиях по полученному значению акустического сопротивления трансформирующего слоя по соответствующим таблицам подбирают материал, акустические свойства которого оказываются наиболее близкими к полученному значению. После этого проводят расчет требуемой толщины трансформирующего слоя.

Ответ. Акустическое сопротивление трансформирующего слоя для границы воды и воздуха составляет $2,7 \cdot 10^4 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$.

Задача 3.4

Коэффициент отражения для жидких сред

$$R_p = \frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \psi}{Z_1 \cos \psi + Z_2 \cos \theta},$$

где Z_1 – акустическое сопротивление воды; Z_2 – акустическое сопротивление ртути.

Направления падающего и прошедшего лучей связаны отношением

$$\sin \psi = \frac{V_{l2}}{V_{l1}} \sin \theta,$$

или

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_{l2}}{V_{l1}} \sin \theta \right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_{l2}}{V_{l1}} \right)^2 (1 - \cos^2 \theta)}.$$

Акустическое сопротивление жидких сред

$$Z_a = \rho_0 V_l ,$$

скорость распространения акустической волны в жидкости

$$V_l = \sqrt{\frac{1}{\chi \rho_0}} ,$$

где χ – коэффициент сжимаемости и ρ_0 – удельная плотность определяются из Прил.2.

Для воды

$$V_{l1} = V_{l \text{ воды}} = \sqrt{\frac{1}{0,47 \cdot 10^{-9} \cdot 10^3}} = 1458 \text{ м/с},$$

$$Z_1 = Z_{a \text{ воды}} = 10^3 \cdot 1458 = 1,46 \cdot 10^6 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}.$$

Для ртути

$$V_{l2} = V_{l \text{ ртути}} = \sqrt{\frac{1}{0,038 \cdot 10^{-9} \cdot 13,5 \cdot 10^3}} = 1396 \text{ м/с},$$

$$Z_2 = Z_{a \text{ ртути}} = 13,5 \cdot 10^3 \cdot 1396 = 1,88 \cdot 10^7 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}.$$

Ответ. После вычисления на компьютере получены следующие зависимости модулей коэффициентов отражения (рис.7.1) и прохождения (рис.7.2) на границе вода – ртуть от угла падения.

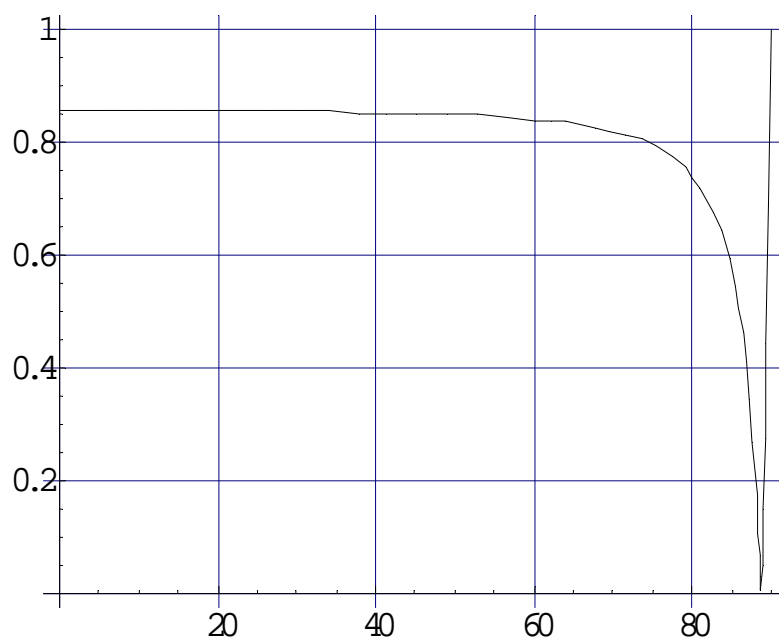


Рис.7.1. Зависимость коэффициента отражения по акустическому давлению волны, падающей из воды на границу с ртутью

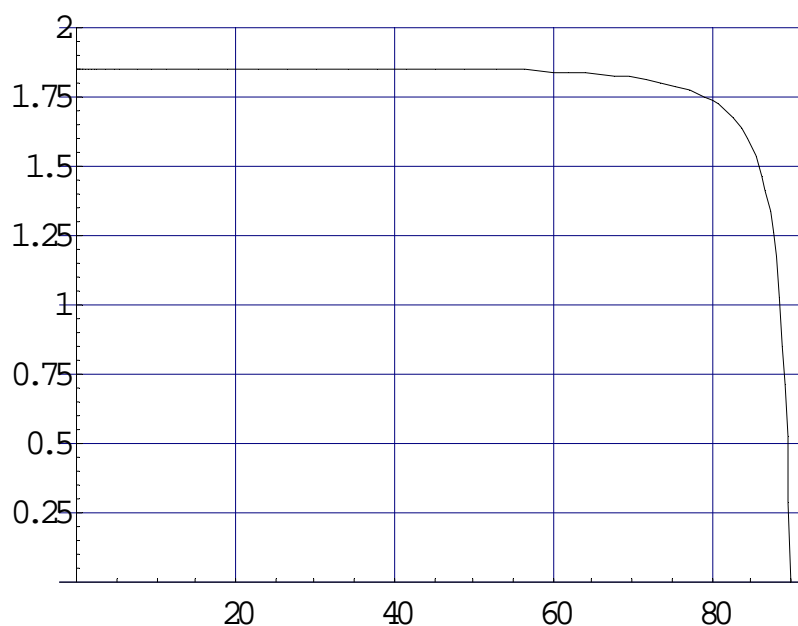


Рис.7.2. Зависимость коэффициента прохождения по акустическому давлению волны, падающей из воды на границу с ртутью

Из рис.7.1 видно, что при угле падения 88,5 град., коэффициент отражения равен нулю и имеет место эффект полного прохождения.

Задача 3.5

Коэффициент отражения по акустическому давлению от границы раздела двух сред

$$R_p = \frac{Z_2 \cos \theta - Z_1 \cos \psi}{Z_1 \cos \psi + Z_2 \cos \theta}.$$

Если падающий угол $\theta \rightarrow 90^\circ$, то

$$R_p = \frac{0 - Z_1 \cos \psi}{Z_1 \cos \psi + 0} = -1.$$

Ответ. Коэффициент отражения по акустическому давлению от границы раздела двух сред при угле падения, стремящемся к 90 град. равен -1 .

Задача 3.6

Критический угол полного отражения

$$\theta_{\text{кр}} = \arcsin \frac{V_{I1}}{V_{I2}},$$

где V_{I1} – скорость распространения акустической волны в воде;
 V_{I2} – скорость распространения акустической волны в анилине;

$$\theta_{\text{кр}} = \arcsin \frac{1480}{1659} = 63 \text{ град.}$$

Ответ. В диапазоне углов падения от 63 до 90 град. прошедшей во вторую среду волны не будет и границу воздуха с анилином можно рассматривать как полностью отражающую.

7.3. Ответы и решения задач, приведенных в главе 4

Задача 4.1

Скорость распространения продольной упругой волны в металлическом стержне рассчитывается по формуле, м/с,

$$V_l = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}},$$

где E – модуль продольной упругости (модуль Юнга). Из Прил. 2 для алюминия $E = 7,1 \cdot 10^{10}$ Н/м² = Па, $\rho_0 = 2,71 \cdot 10^3$ кг/м³.

$$V_l = \sqrt{\frac{7,1 \cdot 10^{10}}{2,71 \cdot 10^3}} = 5,12 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Время пробега акустической волной стержня длиной 3 м

$$t = \frac{L}{V_l} = \frac{3}{5,1 \cdot 10^3} = 0,59 \text{ мс.}$$

Ответ. Поскольку скорость распространения акустической волны от частоты не зависит, время пробега стержня длиной 3 м для обеих частот составит 0,59 мс.

Задача 4.2

В среде алюминия скорость распространения продольной акустической волны

$$V_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho_0(1+\sigma)(1-2\sigma)}},$$

где E – модуль продольной упругости (модуль Юнга); σ – коэффициент Пуассона; ρ_0 – плотность. Из Прил.2 для алюминия $E = 7,1 \cdot 10^{10}$ Н/м² = Па, $\sigma = 0,34$, $\rho_0 = 2,71 \cdot 10^3$ кг/м³.

$$V_l = \sqrt{\frac{7,1 \cdot 10^{10} \cdot (1 - 0,33)}{2,71 \cdot 10^3 \cdot (1 + 0,33)(1 - 2 \cdot 0,33)}} = 6,23 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Скорость распространения сдвиговой волны

$$V_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}},$$

где μ – модуль сдвига. Из Прил.2 $\mu = 2,6 \cdot 10^{10}$ Па;

$$V_t = \sqrt{\frac{2,6 \cdot 10^{10}}{2,71 \cdot 10^3}} = 3,10 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Ответ. Скорость распространения продольной упругой волны в алюминии равна 6,23 км/с, сдвиговой – 3,1 км/с.

Задача 4.3

Скорость распространения продольной волны в изотропном твердом теле

$$V_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho_0(1+\sigma)(1-2\sigma)}},$$

где E – модуль продольной упругости (модуль Юнга); σ – коэффициент Пуассона; ρ_0 – плотность. Из Прил.2 для плавленого кварца $E = 7,2 \cdot 10^{10}$ Н/м² = Па, $\sigma = 0,17$, $\rho_0 = 2,2 \cdot 10^3$ кг/м³.

$$V_l = \sqrt{\frac{7,2 \cdot 10^{10} \cdot (1 - 0,17)}{2,2 \cdot 10^3 \cdot (1 + 0,17)(1 - 2 \cdot 0,17)}} = 5,93 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Длина продольной волны

$$\lambda = \frac{V_l}{f} = \frac{5,93 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6} = 1,98 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Если считать, что упругая продольная волна распространяется вдоль оси x , то деформация связана со смещением частиц среды вдоль этой оси выражением

$$S_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}.$$

Для гармонической волны смещение

$$\vec{u}(x) = \vec{x}_0 \cdot u_{mx} \cdot e^{-jkx},$$

где k - постоянная распространения,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \cdot 3,14}{1,98 \cdot 10^{-4}} = 3,17 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1},$$

тогда

$$S_{xx} = \frac{\partial (u_{mx} e^{-jkx})}{\partial x} = -jk u_{mx} e^{-jkx}.$$

Амплитуда смещения частиц среды

$$u_{mx} = \left| \frac{S_{xx}}{-jk} e^{jkx} \right| = \frac{S_{xx}}{k}.$$

Здесь S_{xx} - деформация;

$$u_{mx} = \frac{10^{-9}}{3,17 \cdot 10^4} = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ м}.$$

Амплитуда колебательной скорости для гармонической волны

$$v_{mx} = \omega u_{mx} = 2\pi f u_{mx} = 2 \cdot 3,14 \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot 3,2 \cdot 10^{-14} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}.$$

Интенсивность акустической волны

$$J_{cp} = \frac{1}{2} v_m^2 \rho_0 V_l = 0,5 \cdot (6 \cdot 10^{-6})^2 \cdot 5,93 \cdot 10^3 = 1 \cdot 10^{-7} \text{ Вт/м}^2.$$

Ответ. Скорость распространения акустической волны $5,93 \cdot 10^3$ м/с, длина волны $1,98 \cdot 10^{-4}$ м, амплитуда смещения частиц среды

$3,2 \cdot 10^{-14}$ м, амплитуда колебательной скорости $6 \cdot 10^{-6}$ м/с, средняя интенсивность $1 \cdot 10^{-7}$ Вт/м².

Задача 4.4

Акустическое сопротивление воздуха

$$Z_{a \text{ воздуха}} = V_{l \text{ воздуха}} \rho_{0 \text{ воздуха}} = 340 \cdot 1,29 = 439 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Акустическое сопротивление сапфира

$$Z_{a \text{ сапфира}} = V_{l \text{ сапфира}} \rho_{0 \text{ сапфира}} = 11,1 \cdot 10^3 \cdot 3,97 \cdot 10^3 = 4,4 \cdot 10^7 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Коэффициент отражения при падении акустической волны из воздуха на поверхность сапфира

$$R_p = \frac{Z_{a \text{ сапфира}} - Z_{a \text{ воздуха}}}{Z_{a \text{ сапфира}} + Z_{a \text{ воздуха}}} = \frac{4,4 \cdot 10^7 - 439}{4,4 \cdot 10^7 + 439} = 0,99998.$$

Ответ. Коэффициент отражения акустической волны при падении по нормали из воздуха на поверхность сапфира составляет 0,99998.

Задача 4.5

Углы падения, отражения и преломления связаны между собой соотношением

$$\frac{\sin \theta_{t \text{ пад}}}{V_{t \text{ пад}}} = \frac{\sin \theta_{t \text{ отр}}}{V_{t \text{ отр}}} = \frac{\sin \theta_{l \text{ отр}}}{V_{l \text{ отр}}} = \frac{\sin \theta_{l \text{ пр}}}{V_{l \text{ пр}}}.$$

При заданной поляризации акустической волны может наблюдаться эффект расщепления отраженной волны, распространяющейся в алюминии, на продольную и сдвиговую. Скорость распространения продольной волны больше скорости распространения сдвиговой вол-

ны, поэтому угол отражения продольной волны будет больше угла падения.

Расчет скорости распространения продольной и сдвиговой волн в алюминии приведен в решении задачи 4.2:

$$V_{lAl} = V_{l\text{отр}} = 6,23 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$V_{tAl} = V_{t\text{отр}} = 3,10 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Скорость распространения акустической волны в воде (см. задачу 2.11)

$$V_{l\text{воды}} = V_{l\text{пр}} = \sqrt{\frac{1}{\chi \cdot \rho_0}} = \sqrt{\frac{1}{0,47 \cdot 10^{-9} \cdot 10^3}} = 1458 \text{ м/с}.$$

Угол отражения сдвиговой волны равен углу падения:

$$\theta_{t\text{пад}} = \theta_{t\text{отр}} = 10 \text{ град.}$$

Угол отражения продольной волны

$$\theta_{l\text{отр}} = \arcsin \left(V_{l\text{отр}} \frac{\sin \theta_{t\text{пад}}}{V_{t\text{пад}}} \right) = \arcsin \left(6,23 \cdot 10^3 \cdot \frac{\sin 10^\circ}{3,1 \cdot 10^3} \right) = 20,4 \text{ град.}$$

Угол преломленной в воду волны

$$\theta_{l\text{пр}} = \arcsin \left(V_{l\text{пр}} \frac{\sin \theta_{t\text{пад}}}{V_{t\text{пад}}} \right) = \arcsin \left(1,458 \cdot 10^3 \cdot \frac{\sin 10^\circ}{3,1 \cdot 10^3} \right) = 4,7 \text{ град.}$$

Ответ. При падении сдвиговой волны вертикальной поляризации под углом 10 град из алюминия на поверхность воды отраженная сдвиговая волна в алюминии пойдет под тем же углом 10 град, появится отраженная под углом 20,4 град продольная волна в алюминии. Прошедшая в воду акустическая волна пойдет под углом 4,7 град относительно нормали к границе.

Задача 4.6

Скорость поверхностной волны Рэлея рассчитывается по формуле

$$\frac{V_R}{V_t} \approx \frac{0,875 + 1,125\sigma}{1 + \sigma}$$

где $V_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$ – скорость сдвиговой волны в плавленом кварце; μ – модуль сдвига; ρ_0 – удельная плотность материала; σ – коэффициент Пуассона (Прил.2).

$$V_t = \sqrt{\frac{3,1 \cdot 10^{10}}{2,2 \cdot 10^2}} = 1,2 \cdot 10^4 \text{ м/с,}$$

$$V_R \approx \frac{0,875 + 1,125\sigma}{1 + \sigma} \cdot V_t = \frac{0,875 + 1,125 \cdot 0,17}{1 + 0,17} \cdot 1,2 \cdot 10^4 = 1,09 \cdot 10^4 \text{ м/с.}$$

Время пробега поверхностной волной отрезка 10 мм

$$t = \frac{S}{V_R} = \frac{10^{-2}}{1,09 \cdot 10^4} = 0,92 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Ответ. Время прохождения поверхностной волной Рэлея отрезка 10 мм на границе плавленый кварц – воздух составляет 0,92 мкс.

Задача 4.7

Критический угол падения продольной волны, при котором в сапфире распространяется только сдвиговая волна, определяется из формулы

$$\sin \theta_{\text{кр1}} = \frac{V_{l1}}{V_{l2}},$$

где V_{l1} – скорость распространения продольной волны в полиэтилене; V_{l2} – скорость распространения продольной волны в сапфире;

$$\theta_{\text{кр1}} = \arcsin \frac{V_{l1}}{V_{l2}} = \arcsin \frac{1950}{11100} = 10,12 \text{ град.}$$

Критический угол падения, при котором при падении продольной волны в сапфире перестает распространяться объемная сдвиговая волна, определяется из формулы

$$\sin \theta_{\text{кр2}} = \frac{V_{l1}}{V_{t2}},$$

где V_{t2} – скорость распространения сдвиговой волны в сапфире.

$$\theta_{\text{кр2}} = \arcsin \frac{V_{l1}}{V_{t2}} = \arcsin \frac{1950}{6040} = 18,8 \text{ град.}$$

Ответ. В диапазоне углов падения менее 10,12 град в сапфире распространяются продольная и сдвиговая волны. В диапазоне углов падения от 10,12 до 18,8 град в сапфире распространяется только сдвиговая волна. При углах падения от 18,8 до 90 град относительно нормали к границе полиэтилена с сапфиром поверхность сапфира можно рассматривать как полностью отражающую.

7.4. Ответы и решения задач, приведенных в главе 5

Задача 5.1

Интенсивность сферической волны в воздухе от пульсирующей сферы малого радиуса рассчитывается по формуле (5.10):

$$J = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{p}_a v_r^*) = \frac{1}{2} \rho_0 V_l v_0^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{(ka)^2}{1+(ka)^2}.$$

Излучаемая мощность определяется интегрированием плотности потока энергии акустической волны по сфере, окружающей источник:

$$P = \iint_s J dS.$$

С учетом того, что амплитуда акустической волны от пульсирующей сферы от угла не зависит,

$$P = J(r) 4\pi r^2.$$

Отсюда

$$J(r) = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{5}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^2} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Вт/м}^2.$$

Для других расстояний: $J(50) = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/м}^2$,
 $J(100) = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}^2$, $J(500) = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2$.

Ответ. Интенсивность акустической волны на расстояниях от пульсирующей сферы 10, 50, 100 и 500 м составляет соответственно $4 \cdot 10^{-3}$, $1,6 \cdot 10^{-4}$, $4 \cdot 10^{-5}$ и $1,6 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2$.

Задача 5.2

Мощность, излученная пульсирующей сферой:

$$P = 2\pi\rho_0 V_l^3 \xi_0^2 \frac{(ka)^4}{1+(ka)^2},$$

где ρ_0 – удельная плотность среды; V_l – скорость распространения акустической волны в среде; ξ_0 – амплитуда смещения поверхности колеблющейся сферы; a – радиус сферы в состоянии покоя; k – постоянная распространения;

$$k = \frac{\omega}{V_l} = \frac{2\pi f}{V_l}.$$

Скорость распространения акустической волны в воздухе 330 м/с (см. задачу 2.1), в воде – 1485 м/с (см. задачу 2.6). Тогда постоянная распространения

$$k_{\text{воздух}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 100}{330} = 1,9 \text{ м}^{-1},$$

$$k_{\text{вода}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 100}{1485} = 0,42 \text{ м}^{-1}.$$

Излучаемая мощность

$$P_{\text{воздух}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 1,29 \cdot 330^3 \cdot (10^{-2})^2 \cdot \frac{(1,9 \cdot 10^{-2})^4}{1 + (1,9 \cdot 10^{-2})^2} = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ Вт},$$

$$P_{\text{вода}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 10^3 \cdot 1485^3 \cdot (10^{-2})^2 \cdot \frac{(0,42 \cdot 10^{-2})^4}{1 + (0,42 \cdot 10^{-2})^2} = 0,64 \text{ Вт}.$$

Ответ. Излучаемая мощность для воздуха равна $1,15 \cdot 10^{-5}$ Вт, для воды – 0,64 Вт.

Задача 5.3

Длина поверхностной волны Рэлея $\lambda = \frac{2\pi}{k}$,

$$k = \frac{\omega}{V_R},$$

где k – постоянная распространения; V_R – скорость распространения поверхностной волны Рэлея.

Следовательно,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi V_R}{2\pi f} = \frac{V_R}{f} = \frac{3,3 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6} = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Период следования пар стержней равен длине поверхностной волны Рэлея:

$$S = \lambda_{\text{ПАВ}} = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Если, например, считать, что ширина планарного металлизированного стержня на подложке равна зазору между стержнями, то расстояние между соседними стержнями должно быть

$$\Delta S = \frac{S}{4} = \frac{1,1 \cdot 10^{-4}}{4} = 2,75 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Ответ. Период стержневой структуры равен 110 мкм, расстояние между стержнями при условии равенства ширины стержня и зазора между ними на частоте 30 МГц составляет 27,5 мкм.

7.5. Ответы и решения задач, приведенных в главе 6

Задача 6.1

Уровень интенсивности относительно стандартного

$$L = 10 \lg \frac{J}{J_{\text{ст}}},$$

где J – уровень интенсивности звука, Вт/м²; $J_{\text{ст}}$ – интенсивность относительно стандартного нулевого уровня, Вт/м², соответствующего порогу слышимости. Следовательно, с учетом того, что $J_{\text{ст}} = 10^{-12}$ Вт/м², интенсивность звука

$$J = J_{\text{ст}} \cdot 10^{\frac{L}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{120}{10}} = 1 \text{ Вт/м}^2.$$

интенсивности звука в гармонической волне

$$J = \frac{p_{am}^2}{2\rho_0 V_l},$$

где p_{am} – амплитуда звукового давления, Па, ρ_0 – удельная плотность воздуха, кг/м³; V_a – скорость распространения акустической волны в воздухе, м/с;

$$p_{am} = \sqrt{2J\rho_0 V_a} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 1,29 \cdot 340} = 29,6 \text{ Па.}$$

Мощность акустической волны, проходящей через площадь S :

$$P = JS = 1 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Вт.}$$

Ответ. Звуковое давление на заданной интенсивности равно 29,6 Па, мощность звука, попадающего в ухо человека, $4 \cdot 10^{-4}$ Вт.

Задача 6.2

Акустическое давление $2 \cdot 10^{-3}$ Па на частоте 1 кГц соответствует уровню громкости 40 фон (см. рис.6.4). На частоте 1 кГц абсолютный уровень акустической громкости 40 дБ. На частоте 20 Гц графику 40 фон соответствует абсолютный уровень акустической громкости примерно 85 дБ. Следовательно, акустическая система должна излучать мощность на $85 - 40 = 35$ дБ больше.

Ответ. Акустическая система должна излучать на 35 дБ больший уровень мощности.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Элементы векторного анализа

Если в каждой точке пространства M ставится в соответствие скалярная величина ψ , то говорят о **скалярном поле** $\psi(M)$, например поле давлений или поле упругих напряжений. Если точка M имеет декартовы координаты (x, y, z) , скалярное поле можно записать в виде $\psi = \psi(x, y, z)$. Поле акустических волн является скалярным полем.

Наглядно скалярное поле можно изобразить с помощью поверхностей равного уровня.

Если в каждой точке пространства M ставится в соответствие вектор \vec{A} , то говорят о **векторном поле** $\vec{A}(M)$. Например, электрическое поле имеет векторный характер.

Наглядно векторное поле можно изобразить с помощью силовых линий.

Представление вектора в ортогональной системе координат

$$\vec{A} = \vec{q}_{01}A_1 + \vec{q}_{02}A_2 + \vec{q}_{03}A_3,$$

где A_i – проекция вектора \vec{A} на координатные оси q_i ;

\vec{q}_{0i} – орты вдоль координатных осей q_i .

Скалярное произведение векторов \vec{A} и \vec{B}

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (\vec{A}, \vec{B}) = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{A} и \vec{B} .

В декартовой системе координат

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

где $A_x, B_x, A_y, B_y, A_z, B_z$ – проекции векторов \vec{A} и \vec{B} на оси x, y, z .

Векторное произведение векторов \vec{A} и \vec{B}

$$\vec{A} \times \vec{B} = [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{n} |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{A} и \vec{B} ;

\vec{n} – единичный вектор нормали к плоскости векторов \vec{A} и \vec{B} , причём \vec{A} , \vec{B} и \vec{n} образуют правую тройку векторов.

В декартовой системе координат

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

где $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – орты декартовой системы координат

Векторно-скалярное (смешанное) произведение векторов $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

$$\vec{A}[\vec{B}, \vec{C}] = \vec{B}[\vec{C}, \vec{A}] = \vec{C}[\vec{A}, \vec{B}].$$

Двойное векторное произведение векторов $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$

$$[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B}).$$

Уравнение поверхностей равного уровня

$$\Psi(q_1, q_2, q_3) = \text{const}$$

Уравнение силовых линий

$$\frac{h_1 dq_1}{A_1} = \frac{h_2 dq_2}{A_2} = \frac{h_3 dq_3}{A_3},$$

где h_i – коэффициенты Лямэ.

Коэффициенты Лямэ для трёх координатных систем:

1. Декартова система координат

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z, \quad \vec{q}_{10} = \vec{x}_0, \quad \vec{q}_{20} = \vec{y}_0, \quad \vec{q}_{30} = \vec{z}_0, \\ h_x = h_y = h_z = 1;$$

2. Цилиндрическая система координат

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z, \quad \vec{q}_{10} = \vec{r}_0, \quad \vec{q}_{20} = \vec{\Phi}_0, \quad \vec{q}_{30} = \vec{z}_0, \\ h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1;$$

3. Сферическая система координат

$$q_1 = r, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi, \quad \vec{q}_{10} = \vec{r}_0, \quad \vec{q}_{20} = \vec{\Theta}_0, \quad \vec{q}_{30} = \vec{\Phi}_0, \\ h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$$

Поток векторного поля \vec{A} через поверхность S

$$\int_S \vec{A} d\vec{S} = \int_S A_n dS,$$

где $d\vec{S} = \vec{n} dS$ и \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к площадке dS ;

A_n – проекция вектора \vec{A} на нормаль \vec{n} .

Дивергенция (или расходимость) векторного поля \vec{A}

$$\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial (A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (A_2 h_1 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} \right].$$

Теорема Гаусса-Остроградского:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} d\vec{s},$$

где замкнутая поверхность S охватывает объем V .

Циркуляция вектора \vec{A} вдоль замкнутого контура l .

$$\oint_l \vec{A} d\vec{l} = \oint_l A_\tau dl,$$

где $d\vec{l} = \vec{\tau} dl$ и $\vec{\tau}$ – единичный вектор, касательный к контуру (направление обхода правовинтовое).

Ротор (или вихрь) векторного поля \vec{A}

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{q}_{10}}{h_2 h_3} & \frac{\vec{q}_{20}}{h_1 h_3} & \frac{\vec{q}_{30}}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема Стокса:

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{s} = \oint_l \vec{A} d\vec{l},$$

где поверхность S опирается на замкнутый контур l .

Градиент от скалярной функции

$$\text{grad } \psi = \vec{q}_{10} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \vec{q}_{20} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \vec{q}_{30} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3}.$$

Дифференциальный оператор – набла ∇ (оператор Гамильтона)

$$\nabla = \vec{q}_{10} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \vec{q}_{20} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \vec{q}_{30} \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3}.$$

Дифференциальные операции с использованием оператора набла ∇

$$\text{grad } \psi = \nabla \psi, \quad \text{div } \vec{A} = (\nabla, \vec{A}), \quad \text{rot } \vec{A} = [\nabla, \vec{A}].$$

Скалярное произведение $(\nabla, \nabla) = \nabla^2$ – оператор Лапласа.

$$\nabla^2 \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A},$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \Delta \psi = \text{div grad } \psi = \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right]. \end{aligned}$$

Некоторые формулы векторного анализа

$$\text{div rot } \vec{A} = 0,$$

$$\text{rot grad } \psi = 0,$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \nabla^2 \vec{A},$$

$$\text{div} [\vec{A}, \vec{B}] = \vec{B} \text{ rot } \vec{A} - \vec{A} \text{ rot } \vec{B},$$

$$\vec{A} \text{ grad } \psi + \psi \text{ div } \vec{A} = \text{div} (\psi \vec{A}).$$

Векторное поле без источников, т.е. с нулевой дивергенцией, называется **соленоидальным**. Векторное поле \vec{A} , для которого во всех точках удовлетворяется условие $\text{rot } \vec{A} = 0$, называется **потенциальным**.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Акустические свойства некоторых сред

Твердые вещества

Вещество	Плотность ρ , кг/дм ³	Модуль упругости (Юнга), $E \cdot 10^{-10}$ Н/м ²	Модуль сдвига, $\mu \cdot 10^{-10}$ Н/м ²	Коэффициент Пуассона σ
Алюминий	2,71	7,1	2,6	0,33
Медь	8,90	12,3	4,55	0,35
Свинец	11,34	1,6	0,57	0,44
Сталь	7,70	20,6	8,0	0,29
Бериллий	1,85	30,0	14,5	0,03
Лед	0,90	10,1	4,0	-
Плавленный кварц	2,2	7,2	3,1	0,17
Полиэтилен	0,92	0,020	-	-
Фторопласт	2,2	0,045	-	-
Пенопласт	0,1	0,005	-	-

Жидкие вещества

Вещество	Удельная плотность ρ , кг/дм ³	Коэффициент сжимаемости χ , 1/ГПа	Коэффициент сдвиговой вязкости η , мПа·С (при 20 ⁰ С)
Вода	1,0	0,47	1,002
Ацетон	0,8	1,27	0,322
Глицерин	1,26	0,22	1480
Ртуть	13,5	0,038	1,554

Газообразные вещества

Вещество	Плотность (0 ⁰ С, 101,3 кПа) ρ , кг/м ³	Газо- вая посто- янная R , кДж/(кг·К)	Пока- затель Адиа- баты γ	Кoeffи- циент сдвиго- вой вязкости (20 ⁰ С, 101,3 кПа) η , мПа·С
Воздух	1,29	287	1,40	0,0182
Азот	1,25	297	1,40	0,0175
Водород	0,09	4125	1,41	0,0088
Гелий	0,18	2078	1,66	0,0196

Библиографический список

1. Красильников А.В. Введение в акустику.– М.: МГУ, 1992.
2. Савельев И.В. Курс общей физики: Учеб. пособие. В 3-х т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика.– М.: Наука, 1988.
3. Акустика в задачах. /Под ред. С.Н. Турбатова, О.В. Руденко.– М.: Физмат. 1996.
4. Кайно Г. Акустические волны. – М.: Мир, 1990.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986.
6. Радиовещание и акустика: Учебник для ВУЗов. /Под ред. М.В. Гитлица. – М.: Радио и связь, 1989.
7. Справочник по акустике. /Под ред. М.А. Сапожкова. М.: Связь, 1979.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Общие сведения о волновых процессах	5
1.1. Упругие электромагнитные волны	5
1.2. Распределение волн по частоте	6
1.3. Энергия и скорость волн	9
1.4. Линейные и нелинейные волны.	10
1.5. Волновое уравнение Даламбера.	10
1.6. Гармоническая волна и ее параметры.	11
1.7. Волновые явления.	14
Глава 2. Продольные акустические волны в неограниченной среде	15
2.1. Основные величины акустического поля	15
2.2. Уравнения акустического поля.	21
2.3. Волновое уравнение Даламбера. Скорость распространения продольной акустической волны	22
2.4. Волновое уравнение Гельмгольца. Уравнение плоской акустической волны	26
2.5. Акустический импеданс	29
2.6. Уравнение баланса энергии акустического поля. Интенсивность акустической волны	32
2.7. Акустические потери	37
2.8. Задачи для самостоятельного решения	43
Глава 3. Отражение и прохождение акустических волн на границе раздела сред	45
3.1. Коэффициенты отражения и прохождения при нормальном падении акустической волны на границу раздела сред	45
3.2. Акустическое согласование сред	51

3.3. Наклонное падение продольной акустической волны на границу раздела жидких и газообразных сред	54
3.4. Задачи для самостоятельного решения	59
Глава 4. Акустические волны в твердых телах	60
.....	
4.1. Основные величины и уравнения акустического поля	60
4.2. Волновое уравнение Даламбера. Скорость продольных и сдвиговых волн	64
4.3. Отражение и прохождение акустических волн на границе раздела твердых сред	67
4.4. Поверхностные акустические волны	74
4.5. Задачи для самостоятельного решения	78
Глава 5. Возбуждение и излучение акустических волн	79
.....	
5.1. Излучение акустических волн	79
5.2. Электромеханические преобразователи	87
5.3. Пьезоэлектрические преобразователи	88
5.4. Встречно-стержневые пьезоэлектрические преобразователи	93
5.5. Задачи для самостоятельного решения	96
Глава 6. Элементы акустики звукового диапазона	97
.....	
6.1. Строение слухового аппарата человека	97
6.2. Свойства слуха	99
6.3. Ответы и решения задач, приведенных в главе 4	104
6.4. Задачи для самостоятельного решения	104
6.5. Ответы и решения задач, приведенных в главе 5	109
Глава 7. Решение контрольных задач	109
.....	
7.1. Ответы и решения задач, приведенных в главе 6	103
7.2. Ответы и решения задач, приведенных в главе 7	103
7.3. Ответы и решения задач, приведенных в главе 8	103
7.4. Ответы и решения задач, приведенных в главе 9	103
7.5. Ответы и решения задач, приведенных в главе 10	103
Приложение 1. Ответы и решения задач, приведенных в главе 3	113
.....	
.....	4

Приложение 2. Акустические свойства некоторых сред . . .	13
.....	8
Библиографический список	139
.....	

Учебное пособие

Соловьянова Ираида Павловна
Шабунин Сергей Николаевич

Теория волновых процессов
Акустические волны

Редактор И.Г. Южакова

Компьютерная верстка авторская

ИД № 06263 от 12.11.2001 г.

Подписано в печать

Формат 60x84 1/16

Бумага писчая

Печать офсетная

Уч.-изд. л. 6,3

Усл. печ. л. 7,34

Тираж

Заказ

Цена «С»

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19